УДК 528.33

К.Р. Третяк

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО КРИТЕРІЮ ОПТИМІЗАЦІЇ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ

У роботі [1] отримано цільову функцію узагальненого критерію оптимізації геодезичних мереж

$$R(\varepsilon) = \ln Э''_и + \ln Э''_р + \ln М''_и + \ln М''_р + \ln Г''_и + \ln Г''_р, \qquad (1)$$

де Э"и, Э"р, М"и, М"р, Г"и, Г"р - штрафні функції витрат на реалізацію проекту геодезичної мережі і втрат очікуваних точнісних параметрів, параметрів вимірів і геометричних характеристик мережі. При відсутності допустимих умов для значень параметрів одного з доданків (1) він залежно від умов задачі перетворюється у звичайну функцію втрат, або повністю знищується. Відповідно значення доданків (1) будуть додатними при невиконанні умов задачі, а в протилежному випадку, за виключенням оптимізованого параметра, дорівнюватимуть нулю. Основною перевагою отриманої цільової функції є можливість виконання сумісної оптимізації параметрів різноманітної фізичної природи. Це можливе завдяки оперуванню параметрами однакової і еквівалентної метричності,

(C) Третяк К.Р., 1995

якими є натуральні логарифми штрафних функцій. Відповідно проектне середовище параметрів різноманітної метричності трансформується в єдиний та еквівалентний простір. Оскільки простір позначається буквою L, то запропонований критерій названий L-критерієм.

Доказом переваги досліджуваного критерію є результати його експериментального порівняння з іншими відомими критеріями. Необхідною умовою є те, що значення оптимізаційних параметрів, отриманих за L-критерієм, мають бути найбільш близькими до екстремальних і в сукупності будуть кращими від параметрів, отриманих за іншими критеріями.

Ефективність кожного критерію підраховують за такою функціональною залежністю

$$J_t = \sum_{i=1}^{n} \left[\max(G_t(m_i)) - \max(G_i(m_i))\right] / \max(G_i(m_i)), \qquad (2)$$

де G_t - досліджуваний критерій оптимізації; m_i - параметри (геометричні, економічні, точнісні), які визначать загальну цільову функцію задачі багатоцільової оптимізації, $\max(G_i(m_i))$ - максимальні значення параметра m_i отриманого за критерієм G_i - з відповідною цільовою функцією $\max(m_i) - \min$, $\max(G_t(m_i))$ - максимальне значення параметра m_i отриманого за критерієм G_t з цільовою функцією $\max(m_t) - \min$, n - кількість параметрів, які визначають загальну цільову функцію задачі багатоцільової оптимізації. Параметр J_t є інваріантною величиною, незалежною і об'єктивною характеристикою кожного критерію оптимізації в будь-яких задачах багатоцільової оптимізації. За допомогою залежності (2) в [1] доведена перевага L-критерію над відомими іншими критеріями для розв'язання задач оптимізації геометрії планових геодезичних мереж.

Дослідимо ефективність L-критерію для другого і третього рівнів оптимізації геодезичних мереж за класифікацією, запропонованою в [2]. Другий рівень - це оптимальний розподіл ваг вимірів у геодезичній мережі, а третій рівень - це оптимізація додаткових вимірів.

Ефективність L-критерію оптимізації для розв'язання задачі оптимального розподілу ваг вимірів у геодезичних мережах продемонструємо на двох прикладах.

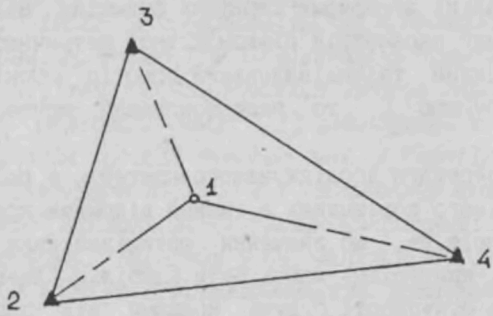

Рис.1. Схема оберненої кутової засічки.

В схемі кутової засічки (рис.1) з координатами пунктів

N	1	2	3	4
X (м)	25000	10000	50000	20000
Y (м)	15000	10000	10000	50000

необхідно визначити найвигідніший розподіл ваг вимірів по трьох напрямках за умови, що їх сума дорівнюватиме 1, а значення максимальної півосі еліпса похибок визначального пункту 1 і похибка найслабшого напрямку і сторони в сукупності будуть найбільш близькими до мінімальних. Середня квадратична похибка виміру напрямку з вагою 1 дорівнює 1". Для порівняння оптимізацію виконаємо за A, D, E, I, G_A, G_α, G_S і L-критеріями на персональній ЕОМ за допомогою алгоритму, адаптованого для інтегрованого пакета "QUATTRO PRO".

В табл.1 ілюструються результати оптимізації кутової засічки. Результати обчислень за D і G_S-критеріями і за E, I, G_A-критеріями виявились тотожними. Результати оптимізації за L-критерієм записані в стовпчик під назвою L_1.

У перших трьох рядках таблиці наведені оптимальні значення ваг вимірів. З четвертого по дев'ятий рядки наведені очікувані похибки напрямків і сторін 1-2, 1-3, 1-4. Далі подані значення суми логарифмів параметрів, які складають загальну цільову функцію, сліду, детермінанта, числа Тодда кореляційної матриці, а також параметри еліпса похибок пункту 1, m_A, m_B, θ - великої і малої півосей еліпса похибок і дирекційного кута та великої півосі. У передостанньому рядку наведені значення параметра J_i згідно з таким виразом

$$J_t = \{[\max(G_t(m_A)) - m'_A]/m'_A\} + \{[\max(G_t(m_\alpha)) - m'_\alpha]/m'_\alpha\} + \{[\max(G_t(m_S/S)) - m'_S/S]/m'_S/S\}\cdot 100\ \%, \qquad (3)$$

де $\max(G_t(m_A))$, $\max(G_t(m_\alpha))$, $\max(G_t(m_S/S))$ - максимальні значення параметрів m_A, m_α, m_S/S - отримані за досліджуваним критерієм, m'_A, m'_α, m'_S/S - екстремальні значення параметрів, отримані в нашому випадку відповідно за G_A, G_α, G_S-критеріями оптимізації. Для наочності порівняння критеріїв оптимізації параметр J_1 виразимо в процентах.

Таблиця 1

Результати оптимізації ваг вимірів обереженої кутової засічки за A, D, E, I, G_A, G_α, G_S, L_1, L_2-критеріями оптимізації

Параметр	Критерії оптимізації					
	A	D, G_S	E, I, G_A	G_α	L_1	L_2
P_1	0,3090	0,5000	0,1073	0,0000	0,3460	0,2381
P_2	0,0000	0,0000	0,1564	0,1294	0,0014	0,0586
P_3	0,6910	0,5000	0,7363	0,8706	0,6526	0,7033
m''_α 1-2	2,7540	3,2240	2,5210	2,3650	2,8280	2,6650
m''_α 1-3	1,5200	1,7560	1,5630	1,8570	1,5560	1,5130
m''_α 1-4	0,8460	0,6920	1,1270	2,1590	0,8040	0,9080
m_S/S1-2	1/114658	1/145851	1/ 81822	1/ 42583	1/121415	1/104768
m_S/S1-3	1/151603	1/158916	1/131932	1/ 74198	1/155209	1/148379
m_S/S1-4	1/171461	1/145851	1/182959	1/192458	1/166716	1/176192
$\Sigma \ln m_i$	-12,1872	-12,1165	-12,0315	-10,7876	-12,1927	-12,1641
Sp(K)	0,063570	0,072844	0,074685	0,170725	0,063967	0,064500
det(K)	0,028901	0,026710	0,037342	0,066939	0,028070	0,030732
τ	1,557467	2,290731	1,000037	2,066586	1,685616	1,367546
m_A(M)	0,212160	0,247350	0,193250	0,371930	0,217520	0,205010
m'_B(M)	0,136220	0,107980	0,193240	0,179970	0,129040	0,149910
θ°	26	21	-38	15	24	26
J_1 %	53,438	64,355	84,860	334,975	52,297	57,984
J_2 %	117,385	208,010	142,155	760,808	126,570	111,256

$\boxed{2,365}$ - Екстремальне значення параметра m_α.

$\boxed{2,754}$ - Максимальне значення параметра m_α за досліджуваним критерієм.

Додатково ефективність запропонованого критерію продемонструємо розв'язанням такої задачі.

На аналогічній схемі необхідно знайти найвигідніший розподіл ваг вимірів, при якому значення сліду, детермінанта, числа Тодда кореляційної матриці, максимальної півосі еліпса похибок пункту 1 і похибка найслабшого напрямку і сторони будуть максимально близькими до мінімальних.

В табл.1 введено додатковий стовпець під умовною назвою L_2 зі значеннями, які відповідають L-критерію оптимізації з цільовою функцією, яка відповідає умові даної задачі, а в останньому рядку наведені значення параметра J_2, який характеризує ефективність досліджуваних критеріїв оптимізації. Параметр J_2 розраховано за такою залежністю

$$J_t = \{[\det_t(K) - \det'(K)]/\det'(K) + [Sp_t(K) - Sp'(K)]/Sp'(K) + [\tau_t - \tau']/\tau' + [\max(G_t(m_A)) - m'_A]/m'_A + [\max(G_t(m_\alpha) - m'_\alpha]/m'_\alpha + [\max(G_t(m'_S/S) - m'_S/S]/m'_S/S\} \cdot 100\ \%, \quad (4)$$

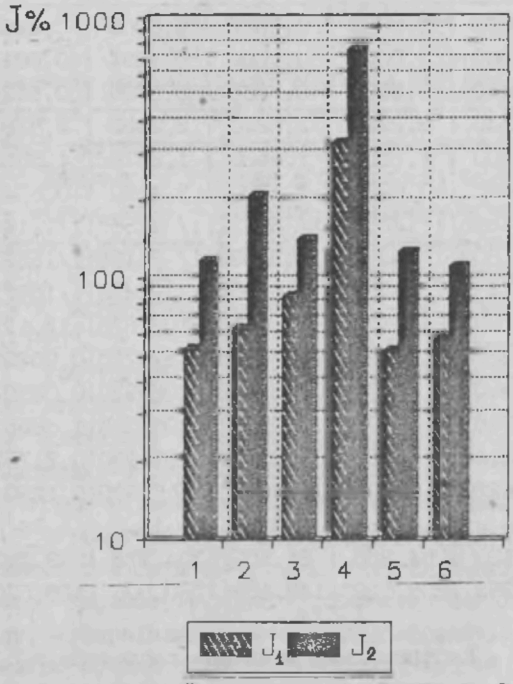

Рис.2. Гістограма ефективності A, D, E, I, G_A, G_α, G_S і L-критеріїв при оптимізації ваг вимірів.
1 - A-критерій; 2 - D, G_S-критерії;
3 - E, I, G_A-критерії; 4 - G_α-критерій;
5 - L_1-критерій; 6 - L_2-критерій.

де det'(K), Sp'(K), τ' - екстремальні значення детермінанта, сліду, числа Тодда кореляційної матриці, отримані за відповідними D, A і I-критеріями оптимізації, $det_t(K)$, $Sp_t(K)$, τ_t - - $\lambda_1(K)/\lambda_n(K)$ - максимальне значення детермінанта, сліду і числа Тодда кореляційної матриці, отримані за досліджуваним критерієм оптимізації.

На діаграмі (рис.2) показана перевага L-критеріїв оптимізації порівняно з іншими критеріями. Параметри J_1, J_2 мають мінімальне значення при оптимізації відповідно L_1 і L_2-критеріями.

На наступному прикладі дослідимо ефективність L-критерія при оптимізації додаткових вимірів.

В мережі тріангуляції (рис.3) з вісьмома пунктами (шість з яких визначальні) необхідно виконати послідовне виключення найбільш малоінформативних вимірів зі схеми всіх можливих вимірів. Задана похибка вимірювання напрямку становить 1". Виключення вимірів необхідно виконувати доти, поки в мережі не залишуться тільки необхідні виміри. Після виключення з мережі кожного виміру за відповідним критерієм оптимізації необхідно фіксувати всі параметри, які характеризують досліджувані A, D, E, I, G_A, G_α, G_s і L-критерії оптимізації. Згідно із залежністю (3) необхідно визначити для кожного чергового виміру за всіма критеріями величину J_t. Перевага L-критерію буде підтверджена в тому випадку, якщо відповідні йому величини J_t будуть постійно мінімальними порівняно з відповідними величинами J_t інших критеріїв.

Таблиця 2

Значення max m_A, см за результатами оптимізації мережі тріангуляції

n	Критерії оптимізації							
	A	D	E	I	G_A	G_α	G_s	L
0	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071	0,071
5	0,071	0,071	0,071	0,073	0,071	0,072	0,071	0,071
10	0,073	0,072	0,072	0,078	0,071	0,073	0,113	0,071
15	0,075	0,073	0,074	0,083	0,072	0,085	0,114	0,073
20	0,076	0,075	0,075	0,084	0,073	0,090	0,131	0,075
25	0,078	0,079	0,078	0,088	0,076	0,110	0,132	0,079
30	0,090	0,092	0,094	0,106	0,084	0,128	0,141	0,092
35	0,128	0,123	0,119	0,119	0,094	0,138	0,194	0,105

Значення параметрів max m_A, max m_α, max(m_s/S), отримані за результатами оптимізації відповідними критеріями наведені в

табл.2,3,4. Для стислості подання інформації значення параметрів наведені тільки для чергових вимірів, кратність яких дорівнює 5. (n = 5, 10, 15,...).

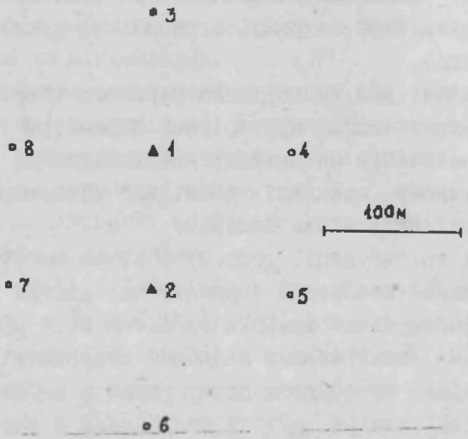

Рис.3. Схема розміщення пунктів мережі тріангуляції.

Таблиця 3

Значення max m''_{α} за результатами оптимізації мережі тріангуляції

n	Критерії оптимізації							
	A	D	E	I	G_A	G_α	G_S	L
0	0,97	0.98	1.06	0,97	0.97	0,97	0.97	0,97
5	0,97	0,99	1,10	1,14	1,09	0,96	1,08	0,97
10	0.99	1,01	1,12	1.74	1,30	0,97	2.33	1,01
15	1,00	1,03	1,14	1,94	1.31	1.00	2.35	1,03
20	1,04	1,06	1.15	2,03	1,34	1,03	2,69	1,06
25	1,31	1,16	1,31	2,19	1,36	1,09	2,72	1,16
30	1,54	1,40	2,49	2,48	1,72	1,21	2,91	1,44
35	1,91	1,50	2,83	2,94	1,78	1,46	4.00	1,83

В табл.5 подані значення величини J_t для відповідного критерію оптимізації згідно з черговістю виключення малоефективних вимірів, кратність яких також дорівнює 5. У першому стовпчику величина n замінена процентним співвідношенням n до кількості всіх можливих вимірів у мережі. За даними табл.5 побудовані гістограми (рис.4, 5) ефективності критеріїв оптимізації від кількості виключених малоінформативних надлишкових вимірів.

Таблиця 4

Значення max(m_S/S) за результатами оптимізації мережі тріангуляції

n	Критерії оптимізації							
	A	D	E	I	G_A	G_α	G_S	L
0	1/141458	1/141458	1/141458	1/140139	1/141458	1/140664	1/141458	1/141458
5	1/140221	1/140663	1/141458	1/136948	1/141458	1/138997	1/141458	1/140221
10	1/136281	1/139816	1/139141	1/128435	1/140822	1/138056	1/141458	1/140218
15	1/133473	1/136398	1/135707	1/121659	1/139169	1/117858	1/139586	1/137219
20	1/131818	1/132661	1/133927	1/121236	1/136371	1/110894	1/137078	1/133605
25	1/127600	1/127315	1/127601	1/114052	1/131818	1/ 90978	1/131974	1/127316
30	1/110671	1/104678	1/106753	1/104979	1/115460	1/ 78051	1/122220	1/108920
35	1/ 78206	1/ 81434	1/ 76155	1/ 84198	1/ 81565	1/ 72456	1/ 92249	1/ 96401

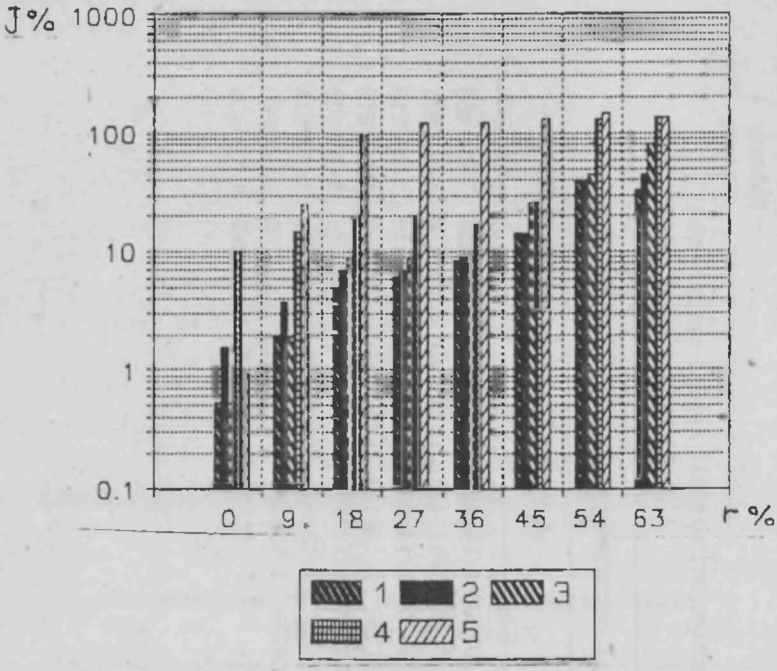

Рис.4. Гістограма ефективності L, A, D, E, I-критеріїв при оптимізації додаткових вимірів:
1 - L-критерій; 2 - D-критерій; 3 - A-критерій;
4 - E-критерій; 5 - I-критерій.

Таблиця 5

Ефективність J % критеріїв оптимізації за результатами досліджень мережі тріангуляції

r, %	Критерії оптимізації							
	A	D	E	I	G_A	G_∞	G_Σ	L
0	0,518	1,554	9,845	0,932	0,518	0,561	0,518	0,518
9	1,916	3,687	14,583	24,755	13,542	3,148	12,500	1,916
18	8,539	6,693	18,510	98,447	34,470	5,222	199,361	5,000
27	8,546	6,684	19,557	122,121	31,299	33,622	193,333	6.085
36	8.918	8,875	16.689	122,742	30.613	42,389	240.617	8,186
45	26,129	13,900	26,129	130,287	24,889	75,801	223,225	13,899
54	43,865	39,579	130,337	145,256	47.680	88,520	208,353	39,414
64	82,216	45.314	137.878	136.693	33,500	68,265	280,356	32.544

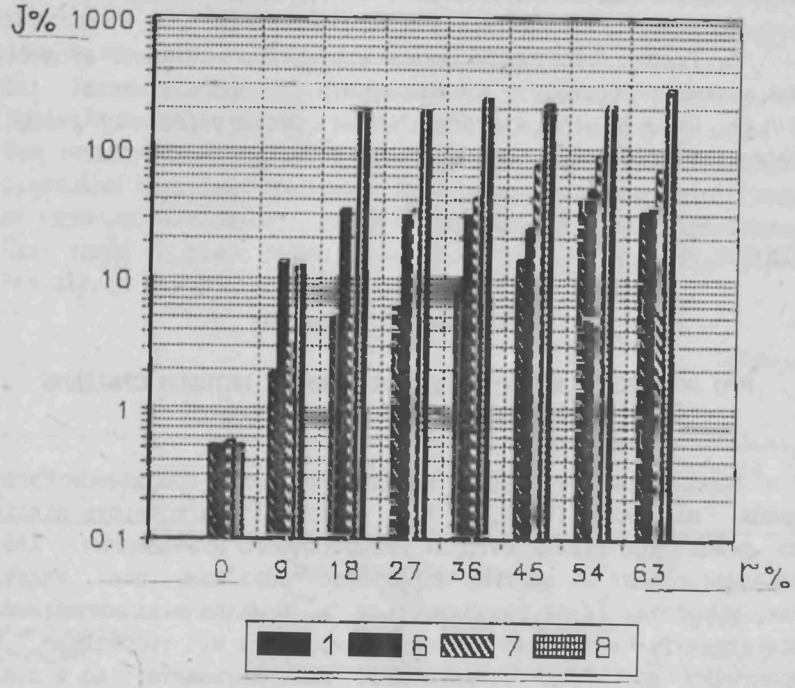

Рис.5. Гістограма ефективності G_A, G_α, G_S і L-критеріїв при оптимізації додаткових вимірів:
1 - L-критерій; 6 - G_α-критерій;
7 - G_A-критерій; 8 - G_S-критерій.

З табл.5 і гістрограм видно, що найбільш ефективним критерієм оптимізації в даному випадку є L-критерій, оскільки значення величини J_t для відповідних чергових малоінформативних вимірів є мінімальними порівняно з іншими критеріями оптимізації. За даними аналогічних досліджень на інших мережах встановлено, що ефективність досліджуваного L-критерія оптимізації зростає із збільшенням кількості пунктів у мережі.

Підсумовуючи викладене, можна стверджувати, що на основі теоретичних та експериментальних досліджень розроблено новий універсальний критерій оптимізації, який має значні переваги порівняно з відомими при розв'язанні задач оптимізації геодезич-

них мереж будь-якого рівня, відбору та інтегрування інформації різноманітної фізичної природи у вимірювальних процесах.

1. Третяк К.Р. Узагальнений критерій оптимізації геодезичних мереж // Геодезія, картографія і аерофотознімання. 1993. Вип.56. С.93-102. 2. Grafarend E. Optimization of geodetic networks. Boll. Gode. Sci. Affini, 1974. 33. P.351-406.