УДК 528.335.031

Д. Г. ВИЛЬНЕР

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ В МЕТОДИКЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЗАСЕЧЕК

Применение той или иной схемы вычислений координат точек съемочного обоснования [8, 10] зависит от случайных факторов (традиции данного подразделения, привычек вычислителя или бригадира и т. п.) и не всегда полностью соответствует геометрическим свойствам конкретно решаемой задачи. Использование ЭВМ для геодезических вычислений потребовало разработки алгоритмов комплексных программ с максимально стандартизованными блоками для всех засечек.

Эти и некоторые другие обстоятельства обусловливают необходимость заново пересмотреть и осмыслить накопленный опыт решения указанного вида геодезических задач. В частности, в данной статье рассмотрен ряд вопросов, связанных с практическим применением предложенного автором метода вычислений засечек, при котором они делятся на два этапа: первый, подготовительный, свойственный данному виду засечки, и второй, завершающий — стандартный для всех видов засечек в плане. При этом первый этап всегда заканчивается определением дирекционных углов пучка засекающих направлений *, во втором — стандартно вычисляются координаты определяемой точки по формулам тангенсов (котангенсов) дирекционных углов этих направлений [2, 3, 4]. Метод эффективен и геометрически «прозрачен» при решении задач с применением любых вычислительных средств, и особенно — ЭВМ; он реализован в алгоритме комплекса программ, применяемых на производстве в течение ряда лет.

Классификация засечек. Известная классификация засечек по виду засекающих направлений на определяемой точке (прямая, обратная, комбинированная) является недостаточной как по четкости определения, так и по существу решаемой задачи. Так, засечки, изображенные на рис. 1, *в, г,* представляют собой по принятой классификации один вид засечек (комбинированный), однако наиболее целесообразные приемы их решения существенно между собой различаются.

При короткой длине ($s<2$ *км*) сплошного направления *P*-3 на рис. 1, *в,* когда она в два, три раза меньше других направлений в засечке, целесообразно ориентировать пучок направлений, измеренных на точке *P,* методом обратной засечки, а не использованием дирекционного угла направления 3—4. Последний способ эффективен при достаточно большой длине сплошного направления.

Если направления с точки *P* (рис. 1, *г*) образуют, по крайней мере, два угла в пределах 30—150°, то ориентирование их методом обратной засечки с последующим использованием ориентированного направления 1—*P* не представляет никаких трудностей. В противном случае придется решать задачу смешанной засечки **, используя два обратных (*P*-2,

* Ниже этот процесс мы назвали ориентированием направлений.

** Такое название засечки впервые ввел А. В. Буткевич [1]. В работах [3, 5] мы ее назвали комбинированной засечкой без сплошных направлений.

P-3) и одно прямое (1-P) направления с последующим включением в вычисления третьего обратного направления (P-4).

Эти примеры показывают, что внешний вид засечки еще не определяет метода ее решения, следовательно, по существу и типа засечки.

Мы предлагаем при классификации засечек учитывать также и способ решения задачи или способ ориентирования засекающих направлений, выделяя три таких способа:

1. Прямое (простое) ориентирование [2].

Исходный дирекционный угол задан (например, координатами исходных пунктов), а дирекционный угол засекающего направления по-

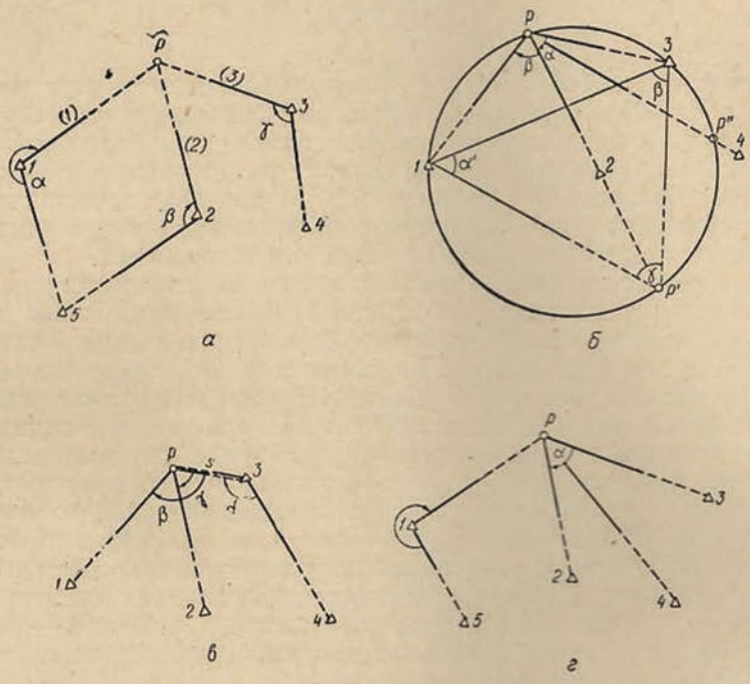

Рис. 1. Виды засечек. Δ1 — исходные пункты и их номера; P — определяемая точка; P', P'' — вспомогательные точки геометрических построений; α, β — измеренные углы; γ, γ_1, γ_2, γ', γ_1', γ_2' — углы геометрических построений; δ_Δ — ошибка дирекционного угла; δ_α — ошибка направления; a, b, s, s_1... — отрезки.

лучают суммированием первого с измеренным углом (например, все направления засечек на рис. 1, *а* или направление 1-P на рис. 1, *г*).

2. Ориентирование решением обратной засечки [4].

По вычисленным координатам вспомогательной точки P' и координатам одного из исходных пунктов непосредственно ориентируется одно направление, а по нему — все остальные направления, измеренные на определяемой точке P (например, рис. 1, *б*).

3. Ориентирование решением смешанной засечки [1, 3, 5, 9].

В результате вычислений ориентируется одно из направлений, измеренных на определяемой точке P, при этом, как известно, допустимо наличие всего двух направлений с точки P (рис. 1, *г*, когда решение обратной засечки по трем направлениям с этой точки нецелесообразно).

Таким образом, с учетом как вида засекающих направлений на определяемой точке, так и способа их ориентирования, предлагается следующая классификация засечек:

1. Засечка прямая (рис. 1, *а*).
2. „ прямая комбинированная (рис. 1, *в* при $s>2$ *км*).
3. „ обратная (рис. 1, *б*).
4. „ обратная комбинированная (рис. 1, *в* при $s<2$ *км*, рис. 1, *г*).
5. „ смешанная (рис. 1, *г* при $\alpha \leqslant 30°$).

Преимущества метода ориентирования засекающих направлений. При вычислениях засечек с применением метода ориентирования работа начинается с определения дирекционных углов твердых направлений, соединяющих попарно исходные пункты. Эти дирекционные углы мы редко получаем непосредственно из каталогов, как правило, их приходится вычислять по координатам пунктов. Затем, суммируя дирекционный угол начального направления со значениями измеренных на данном пункте направлений, мы получаем их дирекционные углы. При наличии на исходном пункте двух измеренных направлений на смежные исходные пункты значение дирекционного угла второго из этих направлений получается, таким образом, дважды, их сравнение позволяет попутно контролировать правильность угловых измерений на этом пункте.

В этом состоит преимущество данного метода, так как при других методах вычислений работа, выполненная специально для контроля, является дополнительной и ее результат, как правило, нигде больше не используется.

После ориентирования направлений, измеренных на исходных пунктах, приступаем к ориентированию направлений, измеренных на определяемых точках, одним из описанных выше способов. Таким образом получаются и запоминаются дирекционные углы всех направлений данного участка, в том числе всех направлений, прямых и обратных, пересекающихся в любой определяемой точке.

Вычисление координат точек происходит дальше стандартно по трем избранным для этой цели направлениям. Выбор направлений обусловлен углом засечки при определяемой точке и возможностью полевого контроля измерений, для чего необходимо использование дополнительного направления, не участвовавшего в решении обратной или смешанной засечки для целей ориентирования обратных засекающих направлений. При этом становятся очевидными дальнейшие преимущества предлагаемого метода:

1. Стандартизация второго, завершающего этапа вычислений плановых координат удобна и при ручном счете, однако особенно выгодна при счете на ЭВМ, так как при всех видах засечек осуществляется выход на общий блок завершения плановой части задачи с последующим возможным переходом на ее высотную часть.

2. Прямые и обратные засекающие направления равноценны и используются одинаково. Полностью исчезают те известные затруднения на стыках прямых и обратных направлений, которые встречались при других способах вычислений.

3. Не имеет значения уменьшение или увеличение дирекционного угла засекающего направления на 180°, одинаково удобны положительные и отрицательные углы. Таким образом, при ручном счете нет необходимости пользоваться значениями углов, превышающими 90°.

4. При работе методом ориентирования внимание вычислителя сознательно обращено на достижение максимальной точности ориентирования засекающих направлений. Он может руководствоваться правилом — ориентировать по наиболее длинным отрезкам, вычислять координаты — по наиболее коротким.

5. Алгоритм обратной засечки предусматривает получение наряду с дирекционным углом ориентирующего отрезка также и его длины.

Это позволяет весьма надежно контролировать правильность выбора варианта решения засечки. Так, на рис. 1, *б* следует забраковать вариант *P*-3, *P*-4, *P*-1 из-за малой длины отрезка *P″*-4 и остановиться на варианте *P*-3, *P*-2, *P*-1 благодаря достаточной длине ориентирующего отрезка 2—*P′*.

Геометрическая наглядность («прозрачность») решения задач и простая интерпретация как окончательных, так и промежуточных результатов выполняемых при этом математических действий — это главное преимущество данного метода.

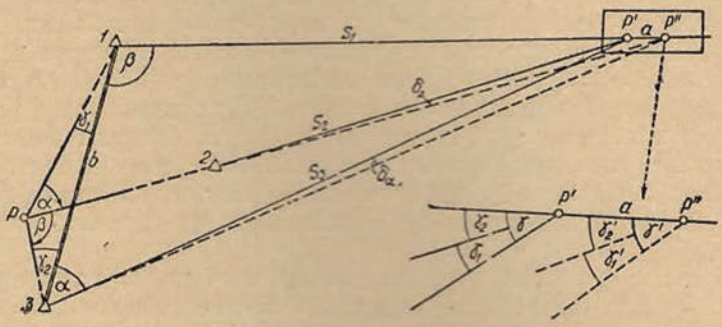

Рис. 2. Ориентирование засекающих направлений. Условные обозначения те же, что и на рис. 1.

Некоторые вопросы, связанные с методом ориентирования засекающих направлений. Практическое применение метода ориентирования на производстве выдвинуло ряд вопросов, на первый взгляд не очевидных, для решения которых требуется более глубокий анализ, подтвержденный многолетним опытом. Ниже остановимся на некоторых из них (см. также работы [6, 7]).

1. При решении обратной засечки методом ориентирования засекающих направлений определяется вспомогательная точка *P′* (рис. 2) в треугольнике, полученном на базисе 1—3, с углами, равными измеренным в засечке, α и β. Если сумма этих углов близка к 180°, угол при точке *P′* уменьшается настолько, что точность определения координат точки *P′* резко падает. Покажем, что это не влияет отрицательно на дирекционный угол направления 2-*P′*, если только углы α и β удовлетворяют требованиям к углам засечки.

Пусть на рис. 2 точка *P′* — пересечение направлений 1-*P′* и 3-*P′* при безошибочно измеренных углах α, β. Угол засечки равен в этом случае

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma_1 + \gamma_2, \tag{1}$$

где γ_1, γ_2 — углы в треугольнике 1—*P*—3.

Ошибка δ_α в направлении 3-*P′* вызовет смещение вершины треугольника с точки *P′* в точку *P″* на линейную величину *a*. Вместо правильного направления 2-*P′* получаем искаженное на ошибку δ_A направление 2-*P″*, при этом

$$\delta_\alpha = \frac{a}{s_3} \sin \gamma'; \tag{2}$$

$$\delta_A = \frac{a}{s_2} \sin \gamma_2'; \tag{3}$$

$$\gamma' = \gamma - \delta_\alpha; \ \gamma_2' = \gamma_2 - \delta_A.$$

Угол γ, хотя и малый, но его величина не меньше 1°, а δ_α меньше 1′, поэтому можем в формулах (2, 3) заменить γ' на γ и тем более γ_2' на γ_2, следовательно

$$\frac{\delta_A}{\delta_\alpha} = \frac{\gamma_2}{\gamma} \cdot \frac{s_3}{s_2}. \tag{4}$$

Из соотношения $\frac{s_3}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, принимая $b=15$ *км*, $\beta=90°$, находим $s_3=172$ *км* для $\gamma=5°$; $s_3=860$ *км* для $\gamma=1°$.

В то же время s_2 — величина одного порядка с s_3 и может быть меньше последней примерно на 10 *км* (если $s_2>s_3$, то $\frac{s}{s_\alpha}$ становится еще меньше), следовательно

$$\frac{\delta_A}{\delta_\alpha} = \frac{172}{162} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma} \approx \frac{\gamma_2}{\gamma} \text{ при } \gamma = 5°, \text{ тем более}$$

$$\frac{\delta_A}{\delta_\alpha} \approx \frac{\gamma_2}{\gamma} \text{ при } \gamma = 1°.$$

$\frac{\gamma_2}{\gamma}$ — всегда правильная дробь, чаще всего близкая к 1/2, отсюда

$$\delta_A = \frac{1}{2}\delta_\alpha. \tag{5}$$

Учитывая влияние ошибки угла β, получаем среднюю квадратическую ошибку дирекционного угла A

$$m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot m_\alpha, \tag{6}$$

где $m_\alpha = m_\beta$ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

При другом соотношении углов γ_1 и γ_2, например,

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}\gamma; \ \gamma_2 = \frac{2}{3}\gamma, \text{ получим}$$

$$m_A = \frac{1}{3}\sqrt{5} \cdot m_\alpha. \tag{6a}$$

Таким образом, можем констатировать, что хотя линейная ошибка положения точки P'

$$a = 0{,}6 \text{ км} \quad \text{при } \gamma = 5°;$$

$$a = 3{,}0 \text{ км} \quad \text{при } \gamma = 1°,$$

ошибка определения дирекционного угла ориентирующего направления 2-P' и в данном случае остается в пределах точности измерения углов обратной засечки.

2. При остром угле засечки γ в точке P' необходимо считаться с другим формальным фактором, который имеет значение только при счете на ЭВМ, а именно, с возможностью получения недопустимо больших для данной машины чисел (координат точки P' и расстояния 2-P') и связанных с этим аварийных остановок ЭВМ. Эту трудность можно обойти, решая треугольник 1P'3 в другом масштабе — выражая координаты в километрах.

3. Оперируя в данном методе дирекционными углами и их тангенсами (котангенсами), нельзя не считаться, особенно при счете на ЭВМ, с возможными очень большими значениями этих функций, да еще умноженными на координату. Правда, не следует преувеличивать это, учитывая, что $\operatorname{tg} 89°59'$ (или $\operatorname{ctg} 0°01'$) все еще меньше 3500 и что вероятность появления значения функции такого порядка практически очень мала. Можно полностью исключить это затруднение, предусмотрев возможность перехода при наличии тангенса бóльше определенного допуска (например, Д-2000) на счет по формулам котангенсов дирекционных углов.

4. При вычислениях координат по формулам тангенсов (или котангенсов) дирекционных углов вторую координату определяемой точки получают через первую по известным формулам:

$$Y_p = (X_p - X_1)\operatorname{tg}(1) + Y_1 = (X_p - X_2)\operatorname{tg}(2) + Y_2; \qquad (7а)$$

или

$$X_p = (Y_p - Y_1)\operatorname{ctg}(1) + X_1 = (Y_p - Y_2)\operatorname{ctg}(2) + X_2, \qquad (7б)$$

где X_P, Y_P — координаты определяемой точки; X_1, Y_1, X_2, Y_2 — координаты исходных пунктов; (1), (2) — дирекционные углы первого и второго засекающих направлений.

Две особенности формул (7а), (7б) рекомендуем использовать для повышения точности и культуры вычислений плановых координат точек:

а) Для получения координаты Y_P (или X_P) определяемой точки по указанным формулам можно использовать одно из двух направлений (1) или (2), причем в обоих случаях вычисленные значения должны быть, теоретически, одинаковыми. Однако на практике они могут различаться на некоторую величину вследствие ошибок вычислений, связанных с округлением чисел и ограничением в них количества значащих цифр.

Обозначим ошибку в координате X_P, обусловленную несовершенством техники вычислений, через m_x^b.

Тогда по формуле (7а) получаем соответствующие ошибки координаты Y_P:

$$\left.\begin{aligned}(m_Y^B)_1 &= m_X^B \cdot \operatorname{tg}(1),\\ (m_Y^B)_2 &= m_X^B \cdot \operatorname{tg}(2).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ошибка вычисленной координаты оказалась прямопропорциональной абсолютному значению тангенса соответствующего направления.

Вот почему мы рекомендуем [2] вторую координату получать через меньший по абсолютному значению тангенс (котангенс) дирекционного угла.

б) Используя формулы (7а), (7б), целесообразно производить внутренний контроль вычислений координат в двух треугольниках следующим образом (контроль по допустимым расхождениям координат из двух треугольников недостаточен).

В двух парах засекающих направлений должно быть одно общее, причем такое, чтобы тангенс его дирекционного угла по абсолютному значению был минимальным. Например, на рис. 1, *а* в качестве общего можно принять направление (2).

Получив из двух пар засечек по известным формулам первую координату $(X_P)_I$, $(X_P)_{II}$, вычисляем вторую координату $(Y_P)_I$ из первой пары (1), (2) по направлению (1):

$$(Y_P)_I = [(X_P)_I - X_1]\cdot\operatorname{tg}(1) + Y_1, \qquad (9)$$

из второй пары (2), (3) — по направлению (2)

$$(Y_P)_{II} = [(X_P)_{II} - X_2]\cdot\operatorname{tg}(2) + Y_2. \qquad (10)$$

Так как $(Y_P)_I$ из уравнения (9) равно $(Y_P)_I$ из следующего уравнения:

$$(Y_P)_I = [(X_P)_I - X_2] \cdot \mathrm{tg}\,(2) + Y_2, \qquad (9a)$$

то из уравнений (9а) и (10) получим

$$(Y_P)_{II} - (Y_P)_I = [(X_P)_{II} - (X_P)_I] \cdot \mathrm{tg}\,(2),$$

или

$$\Delta Y_P = \Delta X_P \cdot \mathrm{tg}(2). \qquad (11)$$

Разность соответствующих координат из двух пар засечек с общей стороной должна удовлетворять равенству (11), в котором фигурирует тангенс дирекционного угла этой общей стороны.

Это и есть дополнительный, весьма важный контроль правильности вычислений координат по этим формулам.

Отметим, что при вычислении вручную вторую координату следует определять по разным направлениям, как показано в (9) и (10), во избежание механической ошибки в исходной ординате (Y_1 или Y_2).

К сожалению, возможность получения внутреннего контроля вычислений по формулам тангенсов дирекционных направлений в двух разных треугольниках (с общим направлением) вычислителями редко используется, между тем эта возможность — еще одно преимущество метода ориентирования засекающих направлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буткевич А. В. О вычислении координат «смешанных» засечек (задача Лакруа). — «Геодезия и картография», 1966, № 7.
2. Вильнер Д. Г. Программа решения прямой геодезической засечки (в плане и по высоте) на ЭЦВМ БЭСМ-2. — «Бюллетень по рационализации», 1965, № 79.
3. Вильнер Д. Г. О комбинированной засечке без сплошных направлений. — «Геодезия и картография», 1968, № 10.
4. Вильнер Д. Г. Вычисление высот опознаков на ЭВМ с учетом местного коэффициента рефракции. — «Геодезия и картография», 1970, № 1.
5. Вильнер Д. Г. О точности комбинированной засечки без сплошных направлений. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1971, вып. 13.
6. Ларченко Е. Г. Механизация вычислительных работ. М., Геодезиздат, 1965.
7. Ларченко Е. Г., Никольский Е. К. О выявлении грубых ошибок в координатах пунктов, определяемых методом засечек. — «Геодезия и картография», 1967, № 7.
8. Морозков С. Г., Извеков М. М., Павлов В. Ф., Пчелина А. А. Пособие по вычислению координат и высот опознаков. М., Геодезиздат, 1960.
9. Некрасов О. К. О точности смешанной засечки. «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1968, вып. 2.
10. Чичигина В. В. Краткое руководство по вычислению рабочих координат опознаков. М., Геодезиздат, 1951.

Работа поступила в редколлегию 31 декабря 1973 года. Рекомендована кафедрой геодезии Львовского политехнического института.