

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ГЕОПОТЕНЦІАЛУ ПРИ МАЛИХ ПОВОРОТАХ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

© Марченко О.М., Ярема Н.П., 2004

Рассмотрен вопрос строгого преобразования гармонических коэффициентов геопотенциала от заданной на фиксированную эпоху системы координат к некоторой близкой системе. Задача решена в замкнутом виде для коэффициентов 2-го порядка с использованием условия сохранения нулевым следа девиаторной части тензора инерции планеты, что приводит к простому алгоритму их преобразования, основанному на использовании ортогональных матриц для случая конечных вращений.

The rigorous transformation of harmonic coefficients of the geopotential from the fixed at given epoch reference frame to some close system was considered. This problem was solved in the closed form for the 2-nd degree harmonic coefficients with additional condition to save zero trace of the deviatoric part of the planet's tensor of inertia that leads to a simple algorithm of the transformation based on the use of orthogonal matrices in the case of finite rotations.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими завданнями. Значне підвищення точності лазерних спостережень штучних супутників Землі і запуск нових супутників місій CHAMP і GRACE (на орбіти з висотою в 250-300 км) привели останнім часом до підвищеної уваги визначення варіацій з часом гармонічних коефіцієнтів геопотенціалу та їх відповідного геофізичного трактування. Вважається вже встановленим фактом можливість знаходження варіацій нормованих гармонічних коефіцієнтів ($\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$) геопотенціалу 2-го порядку з рівнем точності $10^{-12}, 10^{-13}$ та вище (див. напр., [5]). Практичне визначення таких величин, обумовлених різноманітними чинниками, представляє, природно, нові підвищені вимоги до алгоритмів, що використовуються, і необхідність вживання строгих теорій для уникнення впливу немодельованих ефектів. Одним з таких ефектів може бути недостатньо коректне перетворення коефіцієнтів $\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$ (які традиційно задаються в фіксованій на вибрану епоху системі відліку) при поворотах координатної системи, оскільки гармонічні коефіцієнти ($\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$) міняють свої значення при лінійних перетвореннях залежної від часу земної системи координат.

Аналіз останніх досліджень та невирішенні задачі. Як добре відомо, (див., напр., [3]) є тільки два різновиди комутативних поворотів. Перший з них є нескінченно малий поворот. Другий – скінчений поворот навколо фіксованої осі. Зауважимо, що фактично тільки перший випадок нескінченно малого повороту при перетворенні гармонічних коефіцієнтів 2-го порядку саме і використовується в спеціальних задачах супутникової геодезії з припущенням [1, 4], що координатна система $X'Y'Z'$ є близькою до XYZ та малою різницєю $Z-Z'$ в орієнтації третьої осі, що є близькою – після повороту початкової системи координат – до координат x_p, y_p середнього полюсу.

В даній роботі розглянуто методологічно строгий підхід перетворення гармонічних коефіцієнтів 2-го порядку геопотенціалу від заданої на фіксовану епоху системи координат до деякої близької системи (наприклад, пов'язаної з віссю фігури планети), яка “дрейфує” у часі по відношенню до початкової. Задача розв'язана в замкнутому вигляді для гармонік 2-го порядку з додатковою умовою на збереження нульовим сліду девіаторної частини тензора інерції планети (яка забезпечує знання орієнтації його головних осей інерції), що призводить до достатньо простого алгоритму, заснованого на використанні ортогональних матриць для випадку скінчених обертань.

Постановка завдання та його розв'язок

Допоміжні співвідношення. Розглянемо перетворення повністю нормованих гармонічних коефіцієнтів $(\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m})$ другого порядку, визначених у прийнятій земній геоцентричній системі координат XYZ , у систему координат $X'Y'Z'$, яка отримана через певний скінченний поворот системи XYZ навколо початку відліку. Потенціал другого порядку V_2 може бути записаний у наступній формі

$$V_2(P) = \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r} \Rightarrow XYZ \text{ система}, \quad (1a)$$

$$V_2(P) = \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{r}} \Rightarrow X'Y'Z' \text{ система}, \quad (1b)$$

де

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{15}\bar{C}_{22} - \sqrt{5}\bar{C}_{20} & \sqrt{15}\bar{S}_{22} & \sqrt{15}\bar{C}_{21} \\ \sqrt{15}\bar{S}_{22} & -\sqrt{15}\bar{C}_{22} - \sqrt{5}\bar{C}_{20} & \sqrt{15}\bar{S}_{21} \\ \sqrt{15}\bar{C}_{21} & \sqrt{15}\bar{S}_{21} & 2\sqrt{5}\bar{C}_{20} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \sqrt{15}\bar{A}_{22} - \sqrt{5}\bar{A}_{20} & \sqrt{15}\bar{B}_{22} & \sqrt{15}\bar{A}_{21} \\ \sqrt{15}\bar{B}_{22} & -\sqrt{15}\bar{A}_{22} - \sqrt{5}\bar{A}_{20} & \sqrt{15}\bar{B}_{21} \\ \sqrt{15}\bar{A}_{21} & \sqrt{15}\bar{B}_{21} & 2\sqrt{5}\bar{A}_{20} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матриці \mathbf{H} та $\tilde{\mathbf{H}}$ визначені в геоцентричніх системах координат XYZ та $X'Y'Z'$, відповідно; вектори $\mathbf{r}^T = [X; Y; Z]$ та $\tilde{\mathbf{r}}^T = [X'; Y'; Z']$ відповідають цим системам та містять декартові координати біжучої точки P ; GM – добуток гравітаційної сталої G на масу планети M ; a – велика піввісь еліпсоїда обертання; r – відстань від початку системи координат до біжучої точки; $(\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m})$ та $(\bar{A}_{2m}, \bar{B}_{2m})$ – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти в системах XYZ та $X'Y'Z'$, причому слід $\text{TraceH} = \text{Trace}\tilde{\mathbf{H}} = 0$.

Як відомо, поворот координат XYZ навколо початку відліку може бути виражений через три матриці елементарних поворотів.

$$\mathbf{R}_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_3(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для розв'язку можливої неоднозначності у випадку різних послідовностей скінчених поворотів (наприклад, $\mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p) \neq \mathbf{R}_1(-y_p)\mathbf{R}_2(-x_p)$, де x_p, y_p – координати полюсу), використаємо цей другий зазначений випадок з наступним перетворенням вектора \mathbf{r} :

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}, \quad (7)$$

де згідно з [3]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos^2 \lambda (\cos \theta - 1) + 1 & \sin \lambda \cos \lambda (\cos \theta - 1) & -\cos \lambda \sin \theta \\ \sin \lambda \cos \lambda (\cos \theta - 1) & \cos^2 \lambda (1 - \cos \theta) + \cos \theta & -\sin \lambda \sin \theta \\ \cos \lambda \sin \theta & \sin \lambda \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

є матрицею повороту, яка залежить від сферичних координат осі Z' в системі координат XYZ : θ – полярна відстань осі Z' та λ – довгота цієї осі.

Легко перевірити, що матриця \mathbf{Q} може бути сформована наступним чином

$$Q = R_3(-\lambda)R_2(\theta)R_3(\lambda), \quad (9)$$

тобто через поворот навколо фіксованої лінії вузлів системи XYZ та $X'Y'Z'$ на кут θ . Тоді для оберненого перетворення легко отримати

$$\mathbf{r} = Q^T \cdot \tilde{\mathbf{r}} = R_3(-\lambda)R_2(-\theta)R_3(\lambda)\tilde{\mathbf{r}}, \quad (10)$$

оскільки всі розглянуті матриці є ортогональними. Підставивши (7) та (10) в (1), ми можемо визначити потенціал (1) другого порядку V_2 в такій формі

$$V_2(P) = \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \tilde{\mathbf{r}}^T [R_3(-\lambda)R_2(\theta)R_3(\lambda)HR_3(-\lambda)R_2(-\theta)R_3(\lambda)] \cdot \tilde{\mathbf{r}}, \quad (11a)$$

$$V_2(P) = \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^5} \mathbf{r}^T [R_3(-\lambda)R_2(-\theta)R_3(\lambda)\tilde{H}R_3(-\lambda)R_2(\theta)R_3(\lambda)] \cdot \mathbf{r}. \quad (11b)$$

З однієї сторони, (11a) представляє потенціал V_2 , записаний у системі $X'Y'Z'$ через гармонічні коефіцієнти $\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$ системи XYZ . З іншої сторони, (11b) представляє потенціал V_2 , записаний у системі XYZ через гармонічні коефіцієнти $\bar{A}_{2m}, \bar{B}_{2m}$ в системі $X'Y'Z'$. Ці рівняння служать основою для подальших перетворень гармонічних коефіцієнтів другого порядку. Крім того, тепер на відміну від випадка нескінчено малих обертань [4] саме для комутативного повороту (8) системи XYZ зберігається нульовим слід девіаторної частини (3) тензора інерції планети

$$\text{Trace}\tilde{H} = \text{Trace}[QHQ^T] = 0. \quad (12)$$

Алгоритм перетворення гармонічних коефіцієнтів другого порядку. Розглянемо тепер вектор \mathbf{a} , що містить гармонічні коефіцієнти $\bar{A}_{2m}, \bar{B}_{2m}$ в системі $X'Y'Z'$:

$$\mathbf{a} = [\bar{A}_{20}, \bar{A}_{21}, \bar{B}_{21}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_{22}]^T. \quad (13)$$

Взявши до уваги (11b), знайдемо наступну допоміжну матрицю

$$H_\lambda = R_3(\lambda)\tilde{H}R_3(-\lambda), \quad (14)$$

за рахунок чого з'являється можливість прямого перетворення гармонічних коефіцієнтів вектора \mathbf{a} до деякого вектора $\mathbf{c}_\lambda = [C_{20}^\lambda, C_{21}^\lambda, S_{21}^\lambda, C_{22}^\lambda, S_{22}^\lambda]^T$ у вигляді

$$\mathbf{c}_\lambda = R_\lambda(\lambda) \cdot \mathbf{a}, \quad (15)$$

де

$$R_\lambda(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2\lambda & \sin 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 2\lambda & \cos 2\lambda \end{pmatrix}, \quad (16)$$

є ортогональною матрицею повороту (5x5) на кут λ . Зробивши додаткові перетворення, отримаємо нову допоміжну матрицю

$$H_{\lambda\theta} = R_2(-\theta)H_\lambda R_2(\theta), \quad (17)$$

та вектор гармонічних коефіцієнтів $\mathbf{c}_{\lambda\theta} = [C_{20}^{\lambda\theta}, C_{21}^{\lambda\theta}, S_{21}^{\lambda\theta}, C_{22}^{\lambda\theta}, S_{22}^{\lambda\theta}]^T$:

$$\mathbf{c}_{\lambda\theta} = R_\theta(-\theta) \cdot \mathbf{c}_\lambda, \quad (18)$$

де

$$R_\theta(-\theta) = \begin{pmatrix} \frac{3\cos 2\theta + 1}{4} & \frac{\sqrt{3}\sin 2\theta}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}\cos 2\theta}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta & 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}\cos 2\theta + \sqrt{3}} & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3}\cos 2\theta}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & \frac{\cos 2\theta}{4} + \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (19)$$

є ортогональною матрицею повороту (5x5) на кут θ . Врешті ми прийшли до перетворення вектора a , даного в системі $X'YZ'$, у вектор $c = [\bar{C}_{20}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}, \bar{C}_{22}, \bar{S}_{22}]^T$ системи XYZ :

$$c = R_\lambda(-\lambda) \cdot c_{\lambda\theta} = R_\lambda(-\lambda)R_\theta(-\theta)R_\lambda(\lambda) \cdot a . \quad (20)$$

Взівши до уваги властивості цих ортогональних матриць, можемо легко записати обернене перетворення

$$a = R_\lambda(-\lambda)R_\theta(\theta)R_\lambda(\lambda) \cdot c , \quad (21)$$

від вектора c заданого у системі XYZ до вектора a у системі $X'YZ'$. Легко перевірити, що зональний коефіцієнт другого порядку може бути записаним у вигляді

$$\bar{C}_{20} = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{2m} \cos m\lambda + \beta_{2m} \sin m\lambda) \cdot P_{2m}(\cos \theta) , \quad (22)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{20} &= \bar{A}_{20}, & \alpha_{21} \\ \beta_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{cases} \bar{A}_{21} \\ \bar{B}_{21} \end{cases}, & \beta_{22} \\ \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{cases} \bar{A}_{22} \\ \bar{B}_{22} \end{cases} . \quad (23)$$

У загальному (22), можемо знайти перетворення зональних коефіцієнтів довільного n -го порядку як з системи $X'YZ'$ в XYZ , так і з XYZ у $X'YZ'$:

$$\bar{C}_{n0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m (\bar{A}_{nm} \cos m\lambda + \bar{B}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \tilde{P}_{nm}(\cos \theta) , \quad (24a)$$

$$\bar{A}_{n0} = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \tilde{P}_{nm}(\cos \theta) , \quad (24b)$$

де для всіх $m > 0$: $\tilde{P}_{nm}(x) = \sqrt{2(n-m)!/(n+m)!} \cdot P_{nm}(x)$ є квазі-нормовані за А. Шмідтом приєднані функції Лежандра $P_{nm}(x)$, а у випадку $m=0$: $\tilde{P}_{n0}(x) = P_{n0}(x)$.

Інші гармонічні коефіцієнти 2-го порядку можуть бути обчислені з рівняння (20) і представлені у матричній формі

$$c = R_{\theta\lambda} \cdot a = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ -r_{12} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ -r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{14} & -r_{24} & -r_{34} & r_{44} & r_{45} \\ r_{15} & -r_{25} & -r_{35} & r_{45} & r_{55} \end{pmatrix} \cdot a , \quad (25)$$

з елементами

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= (3 \cos^2 \theta - 1) / 2, \\ r_{12} &= -\sqrt{3} \cos \lambda \sin \theta \cos \theta, \\ r_{13} &= -\sqrt{3} \sin \lambda \sin \theta \cos \theta, \\ r_{14} &= (\sqrt{3} \sin^2 \theta u_1) / 2, \\ r_{15} &= \sqrt{3} \cos \lambda \sin \lambda \sin^2 \theta, \\ r_{22} &= \cos^2 \lambda u_2 + \cos \theta \sin^2 \lambda, \\ r_{23} &= \cos \lambda \sin \theta (u_2 - \cos \theta), \\ r_{24} &= -\cos \lambda \sin \theta u_4, \\ r_{25} &= -\sin \lambda \sin \theta (2 \cos^2 \lambda u_3 + 1), \\ r_{33} &= \cos^2 \lambda \cos \theta + \sin^2 \lambda u_2, \\ r_{34} &= \sin \lambda \sin \theta (\cos \theta - 2 \cos^2 \lambda u_3), \\ r_{35} &= -\cos \lambda \sin \theta u_5, \\ r_{44} &= -(4 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda u_3^2 - \cos^2 \theta - 1) / 2, \\ r_{45} &= \cos \lambda \sin \lambda u_3^2 u_1, \\ r_{55} &= 2 \cos^2 \lambda \sin^2 \lambda u_3^2 + \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 2 \cos^2 \lambda - 1, \\ u_2 = 2 \cos^2 \theta - 1, \\ u_3 = \cos \theta - 1, \\ u_4 = \cos \theta u_1 + 2 \sin^2 \lambda, \\ u_5 = 2 \cos^2 \lambda + 2 \cos \theta \sin^2 \lambda - 1. \end{array} \right\} \quad (27)$$

Згідно (21), обернене перетворення може бути представленим ортогональною матрицею $R_{\theta\lambda}^T$, яка визначається транспонуванням ортогональної матриці $R_{\theta\lambda}$ в (25) з елементами (26):

$$a = R_{\theta\lambda}^T \cdot c. \quad (28)$$

Рівняння (28) разом з (26), (27) ще можуть розглядатись, наприклад, як параметричні рівняння для врівноваження різних наборів гармонічних коефіцієнтів другого порядку вектора c в системі $X'Y'Z'$ на фіксовану епоху, прийнятих як спостереження для різних гравітаційних моделей. Необхідні додаткові умови для гармонічних коефіцієнтів $\bar{A}_{21} = \bar{B}_{21} = 0$ просто отримати з (28), якщо вісь Z' співпадатиме з віссю фігури C .

Зауважимо також, що розділення матриці (19) на дві частини

$$R_\theta(-\theta) = R_{const}^\theta + R^\theta, \quad (29)$$

де

$$R_{const}^\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$R^\theta = \begin{pmatrix} \frac{3 \cos 2\theta}{4} & \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3} \cos 2\theta}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta & 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{3} \cos 2\theta}{4} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & \frac{\cos 2\theta}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (31)$$

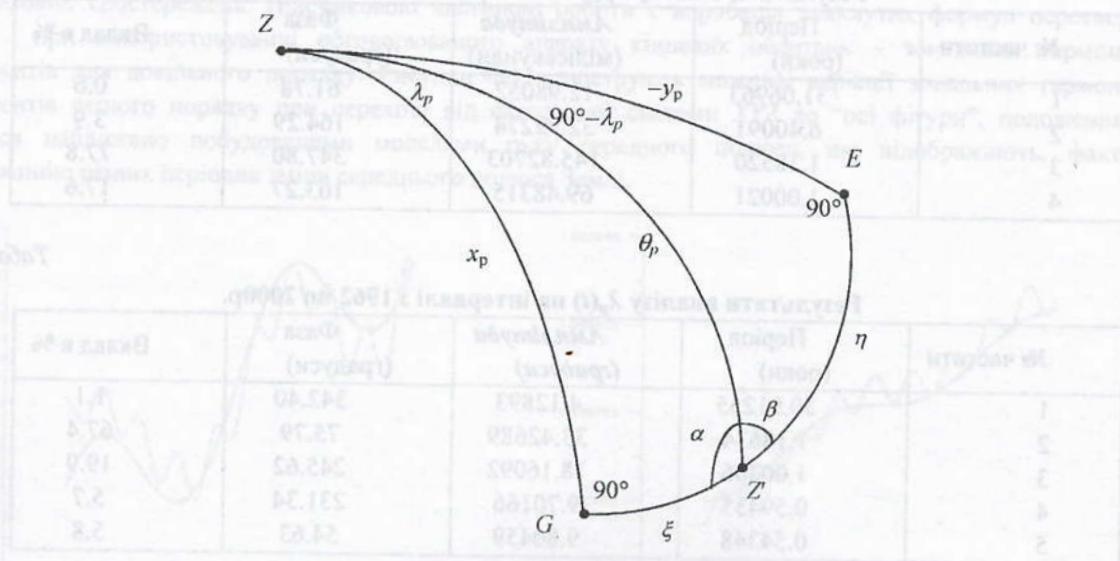
відповідає виділенню в (20) та (21) постійних членів. Постійні члени зустрічаються тільки у виразах для коефіцієнтів \bar{C}_{20} , \bar{C}_{22} , \bar{S}_{22} . Такий висновок призводить до необхідності більш детального вивчення швидкості зміни \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} . Наприклад, розглядаючи координати $\theta(t)$, $\lambda(t)$ як деякі функції від часу t , ми приходимо до невікових (квазі-періодичних) змін в коефіцієнтах \bar{C}_{21} , \bar{S}_{21} , що суперечить рекомендаціям [2] їх визначення через безмежно малі повороти за формулами [1] або [4], оскільки в останніх присутні тільки вікові складові.

Визначення кутів θ та λ . Приймаючи гіпотезу про співпадіння осі фігури з полярними координатами θ_p та λ_p та середньою осі обертання планети, визначимо кути $\theta = \theta_p$ та $\lambda = \lambda_p$ на основі даних координат полюса x_p та y_p , використовуючи розв'язок сферичних прямокутних трикутників $ZZ'G$ та ZEZ' (рис.1), що призводить до простих співвідношень

$$\tan^2 x_p + \tan^2 y_p = \tan^2 \theta_p, \quad (32)$$

$$\tan \lambda_p = \frac{-\tan y_p}{\tan x_p}, \quad (33)$$

$$\tan x_p = \cos \lambda_p \tan \theta_p, \quad \tan y_p = -\sin \lambda_p \tan \theta_p. \quad (34)$$

Рис. 1. До визначення кутів θ_p та λ_p

На основі (33), (34) легко записати тепер і формулу для визначення θ_p :

$$\cos \theta_p = \frac{\cos x_p \cos y_p}{\sqrt{1 - \sin^2 x_p \sin^2 y_p}}. \quad (35)$$

Результати та висновки

Для апробації отриманого алгоритму перетворення гармонічних коефіцієнтів потенціала на першому етапі були обчислені значення кутів θ_p , λ_p на основі відомого розв'язку IERS EOP(IERS)93C01 для координат полюса x_p , y_p , заданих з дискретністю в 0.05 року та використовуючи вирази (33), (35). На другому етапі будувалась модель руху середнього полюса Землі з фільтрацією вікової та довгоперіодичних складових як для координат x_p , y_p , так і кутів θ_p , λ_p . Таблиці 1, 2, 3, 4 ілюструють результати Фурье-аналізу для складових руху полюса Землі, що засновані не тільки на традиційних параметрах x_p , y_p , але й значеннях θ_p , λ_p після видалення з них вікових компонент.

Таблиця 1

Результати аналізу $x_p(t)$ на інтервалі з 1962 по 2000р.

№ частоти	Період (роки)	Амплітуда (мілісекунди)	Фаза (градуси)	Вклад в %
1	30.15760	9.71796	27.15	0.3
2	1.18356	159.84429	75.26	76.9
3	0.99963	86.97983	246.42	22.8

Таблиця 2

Результати аналізу координати $y_p(t)$ на інтервалі з 1962 по 2000р.

№ частоти	Період (роки)	Амплітуда (мілісекунди)	Фаза (градуси)	Вклад в %
1	31.14754	7.03681	35.03	0.2
2	1.18398	158.54572	344.17	79.6
3	0.99903	80.00463	158.62	20.2

Таблиця 3

Результати аналізу $\theta_p(t)$ на інтервалі з 1962 по 2000р.

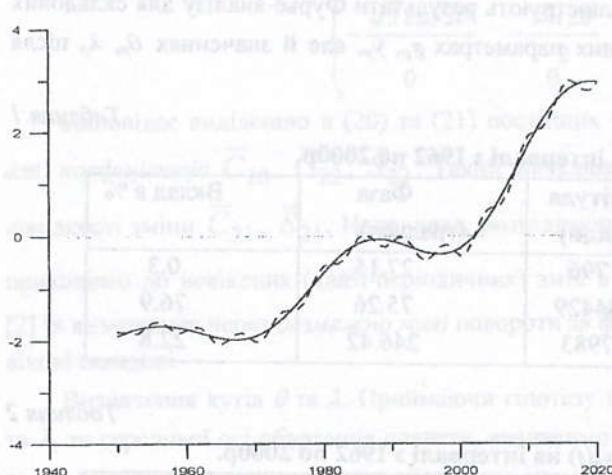
№ частоти	Період (роки)	Амплітуда (мілісекунди)	Фаза (градуси)	Вклад в %
1	31.06963	12.98052	61.78	0.6
2	6.40091	32.92274	164.29	3.9
3	1.18520	145.82703	347.80	77.8
4	1.00021	69.48315	163.27	17.6

Таблиця 4

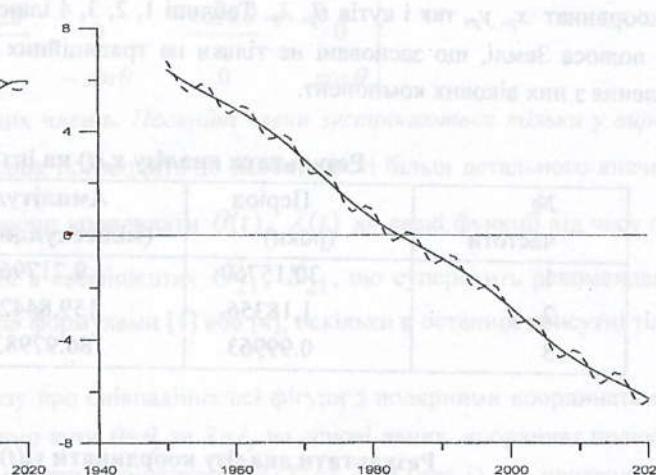
Результати аналізу $\lambda_p(t)$ на інтервалі з 1962 по 2000р.

№ частоти	Період (роки)	Амплітуда (градуси)	Фаза (градуси)	Вклад в %
1	30.91255	4.12893	342.40	1.1
2	1.18634	33.42689	75.79	67.4
3	1.00306	18.16092	245.62	19.9
4	0.59435	9.70166	231.34	5.7
5	0.54348	9.80459	54.63	5.8

Слід зауважити, що на відміну від випадка координат x_p, y_p полюса, в результаті аналізу θ_p, λ_p саме для θ_p з'являється довгоперіодична компонента з періодом біля 6 років. Оскільки така ж компонента виділяється і в довготі λ_p , що відповідає середньому полюсу Землі, то в подальшому використовувалися 2 моделі. Перша з них описує вікову та довгоперіодичну – з періодом в 30 років – складові, а друга – вікову та довгоперіодичну – як суперпозицію 2 компонент з періодами в 30 та 6 років – складові. В цілому обидві моделі представляють рух середнього полюса з точністю кращою ніж 0.01", що відповідає оцінкам IERS. Таким чином, побудовані моделі були основою для обчислення θ_p, λ_p та перевірки гіпотези про співпадіння осі фігури та середньої осі обертання планети шляхом приведення гармонічних коефіцієнтів моделі EGM96 [2] до "осі фігури". Рис. 2, 3 з ілюструють зміни коефіцієнтів $\bar{A}_{21}(t)$ та $\bar{B}_{21}(t)$ в часі, які за визначенням повинні бути нульовими. Практично $\bar{A}_{21} = \bar{B}_{21} \approx 0$ тільки в епоху фіксації моделі EGM96, що відповідає 1986р., і ми приходимо до висновку про актуальність спеціального визначення осі фігури за даними супутникових спостережень безпосередньо на основі запропонованого алгоритму перетворення $\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$.

Рис.2. Зміна з часом $\bar{A}_{21}(t) \cdot 10^{10}$; ($t_0 = 1997$)

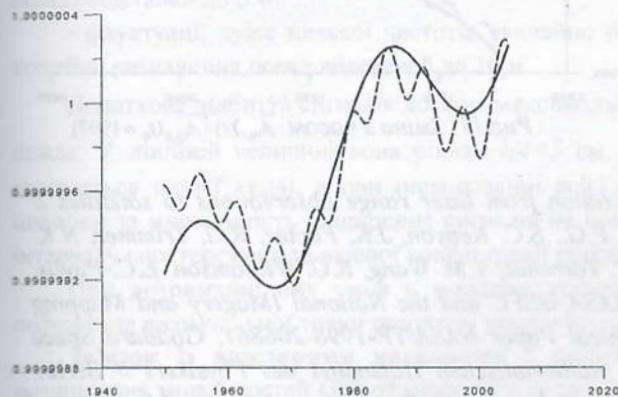
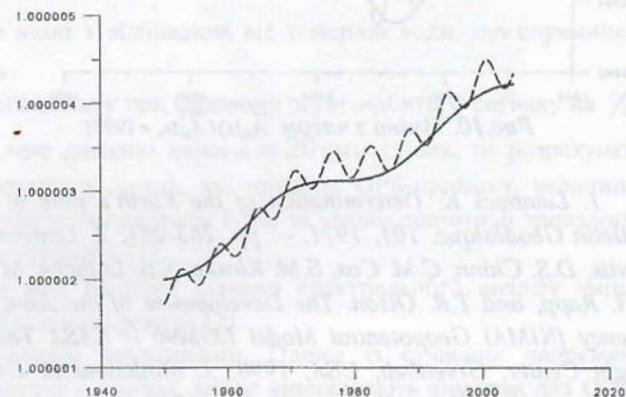
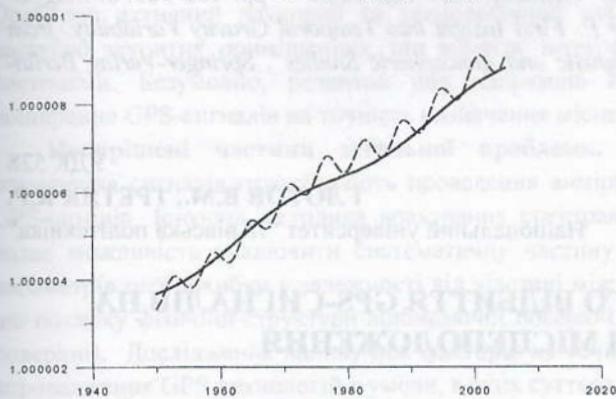
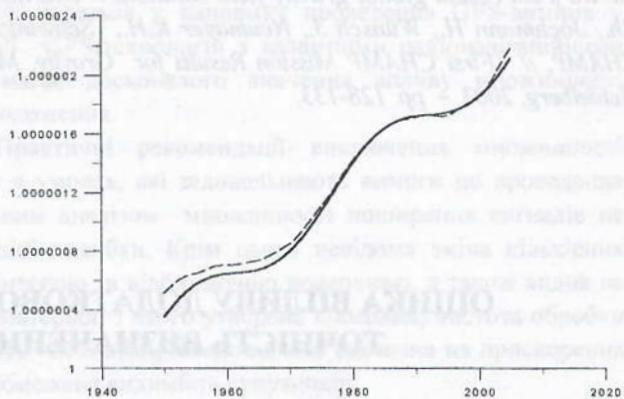
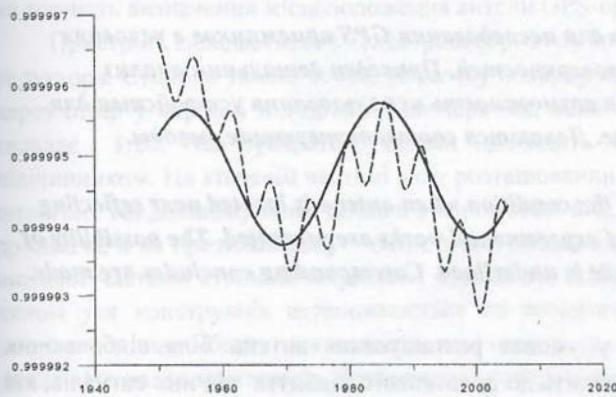
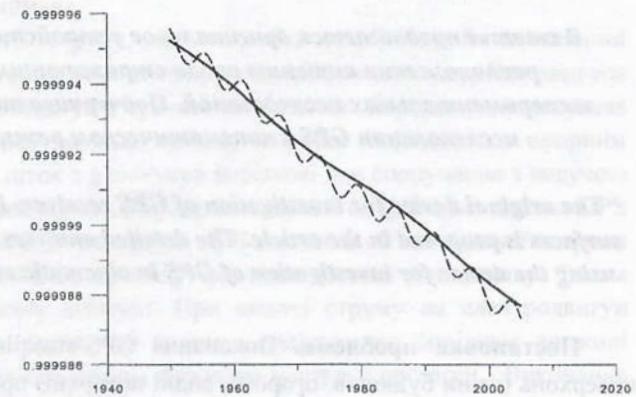
— 1-а модель; — 2-га модель

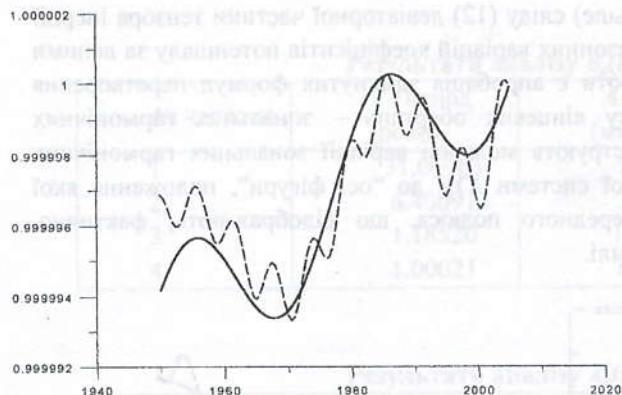
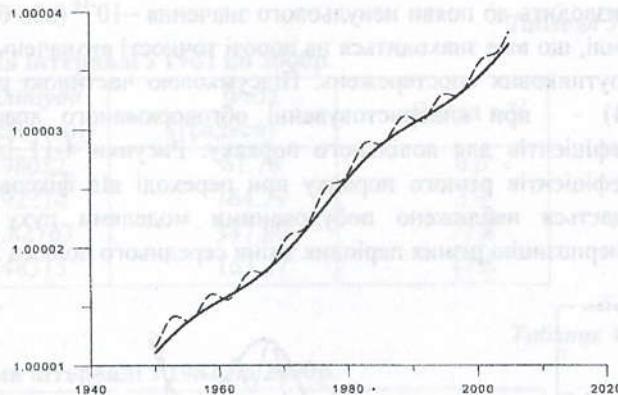
Рис.3. Зміна з часом $\bar{B}_{21}(t) \cdot 10^{10}$; ($t_0 = 1997$)

— 1-а модель; — 2-га модель

Крім того, на прикладі побудованих моделей руху середнього полюса – в припущені його збігу з полюсом осі фігури – показано, що вживання апарату несінченно малих обертань для обчислення матриці Q

призводить до появи ненульового значення $\sim 10^{-14}$ (або більше) сліду (12) девіаторної частини тензора інерції Землі, що вже знаходиться на порозі точності визначення сезонних варіацій коефіцієнтів потенціалу за даними супутниковых спостережень. Підсумковою частиною роботи є апробація замкнутих формул перетворення (24) – при використовуванні обговорюваного апарату кінцевих обертань – зональних гармонічних коефіцієнтів для довільного порядку. Рисунки 4-11 ілюструють можливі варіації зональних гармонічних коефіцієнтів різного порядку при переході від фіксованої системи XYZ до “осі фігури”, положення якої задається наближено побудованими моделями руху середнього полюса, що відображають, фактично, суперпозицію різних періодик зміни середнього полюса Землі.

Рис.4. Зміна з часом $\bar{A}_{30}(t)/\bar{A}_{30}(t_0=1997)$ Рис.5. Зміна з часом $\bar{A}_{40}(t)/\bar{A}_{40}(t_0=1997)$ Рис.6. Зміна з часом $\bar{A}_{50}(t)/\bar{A}_{50}(t_0=1997)$ Рис.7. Зміна з часом $\bar{A}_{60}(t)/\bar{A}_{60}(t_0=1997)$ Рис.8. Зміна з часом $\bar{A}_{70}(t)/\bar{A}_{70}(t_0=1997)$ Рис.9. Зміна з часом $\bar{A}_{80}(t)/\bar{A}_{80}(t_0=1997)$

Рис. 10. Зміна з часом $\bar{A}_{90}(t)/\bar{A}_{90}(t_0=1997)$ Рис. 11. Зміна з часом $\bar{A}_{10,0}(t)/\bar{A}_{10,0}(t_0=1997)$

1. Lambeck K. Determination of the Earth's pole of rotation from laser range observations to satellites // Bulletin Géodésique, 101, 1971. – pp. 263-281. 2. Lemoine, F.G., S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, N.K. Pavlis, D.S. Chinn, C.M. Cox, S.M. Klosko, S.B. Luthcke, M.H. Torrence, Y.M. Wang, R.G. Williamson, E.C. Pavlis, R.H. Rapp, and T.R. Olson. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96 // NASA Technical Paper NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA, 1998. 3. Madelund E. Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers // Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. 4. Marchenko A., Schwintzer P. Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions // Journal of Geodesy, 76(9-10), 2003. – pp. 495-509. 5. Reigber Ch., Jochmann H., Wünsch J., Neumayer K.H., Schwintzer P. First Insight into Temporal Gravity Variability from CHAMP, // "First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies". Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2003. – pp. 128-133.