

ЦИФРОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЛЬЄФУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ SURFER ТА ГЕОІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ARCGIS

© Бурштинська Х., Дорожинський О., Зазуляк П., Заяць О., 2003

Представленные разработки посвящены исследованиям точности создаваемых моделей рельефа с использованием программного обеспечения ArcGIS и Surfer. Исследования выполнялись для комплексного типа рельефа с оценкой созданных моделей рельефа по двум критериям: расхождения между модельными и реальными величинами высот рельефа и соответствуя между структурными элементами рельефа. В качестве математических моделей для построения ЦМР рассматривается коллокационная модель и ее версии. Представлены таблицы оценки точности различных математических функций и исходных данных. Приведены результаты визуализации ЦМР.

The represented development is devoted to researches of accuracy of created models of a relief with use the system of software for geographic data ArcGIS and software programs Surfer. The research is executed for a complex type of a relief with an estimation of restored models of a relief by two criteria: on divergences between modeling and real values of elevations and the accordance between structural elements of a relief. As mathematical models for construction DEM are considered the collocation model and its version: constrained collocation, with basic functions and method Kriging, and also analytical model on base triangulation. The tables of an estimation of accuracy of various mathematical functions and initial data are submitted. The results of visualization DEM are given.

Сучасні методи комп'ютерного опрацювання інформації про земну поверхню базуються на створенні цифрових моделей рельєфу, які слугують основою для ГІС і є пріоритетними для вирішення цілої низки наукових та народно-господарських завдань.

Цифрова модель рельєфу (ЦМР) визначена як цифрове і математичне представлення земної поверхні на основі дискретної сукупності вихідних точок, які дозволяють з заданою точністю обчислити висоту будь-якої точки за її плановими координатами.

Обґрунтування проблеми та методики дослідження.

Найголовнішим чинником у побудові цифрової моделі рельєфу є точність. Виходячи з точності побудови ЦМР, вибирають відповідний метод отримання вихідної інформації та методи математичного

моделювання. Точність створюваних моделей оцінюється за критеріями розходжень між модельними і реальними значеннями висот рельєфу та відповідності між реальними та модельними структурними елементами.

Не дивлячись на значну кількість літературних джерел, пов'язаних з питаннями побудови ЦМР, залишаються невирішеними питання впливу різних чинників на точність математичного моделювання рельєфу і вибору вихідних параметрів моделювання для побудови ЦМР з максимальною точністю. Проблема високоточного математичного моделювання є особливо важливою у задачах проектування об'єктів за ЦМР, визначення гідрологічних характеристик, дослідження ерозійних процесів.

Точність визначення значення відмітки ЦМР залежить від того, яким чином вихідне поле точок представляє рельєф, тобто від способів задання вихідної інформації, від кількості та розташування вихідних точок, від методів математичного опису рельєфу, тобто вибору математичної моделі, за якою здійснюється апроксимація визначуваної відмітки на основі вихідних точок, а також від інтервалу дискретизації побудови ЦМР.

Ці основні чинники необхідно враховувати за умови високоточного моделювання. Що ж стосується вибору математичної моделі, яка б за вихідною інформацією з заданою точністю відтворювала вихідну функцію, то, на наш погляд, розв'язанню цієї задачі найбільш відповідає модель колокації, запропонована [5] для задач фізичної геодезії. Теорію колокації розвинуто в роботах [9, 10, 12]. Її особливості для побудови ЦМР подано в [2].

Підставою служить те, що вихідна інформація, особливо за картометричними даними, для побудови ЦМР є значною, що дозволяє отримувати коваріаційні функції не тільки для ділянок значної довжини, але навіть для локальних моделей.

Стосовно визначення ЦМР основне рівняння колокації запишеться:

$$Z = Ax + \delta Z + \Delta Z, \quad (1)$$

де Ax визначає регуляризовану змінну частину або тренд, δZ – сигнал, змінну складову, яка нерегулярно осцилює навколо Ax і ΔZ – випадкову складову або шум.

На рис. 1 показано: 1 – детермінована функція; 2 – випадкова функція; 3 – детерміноване значення функції Ax ; 4 – сигнал δZ ; 5 – шум ΔZ ; 6 – точки, в яких функція задана.

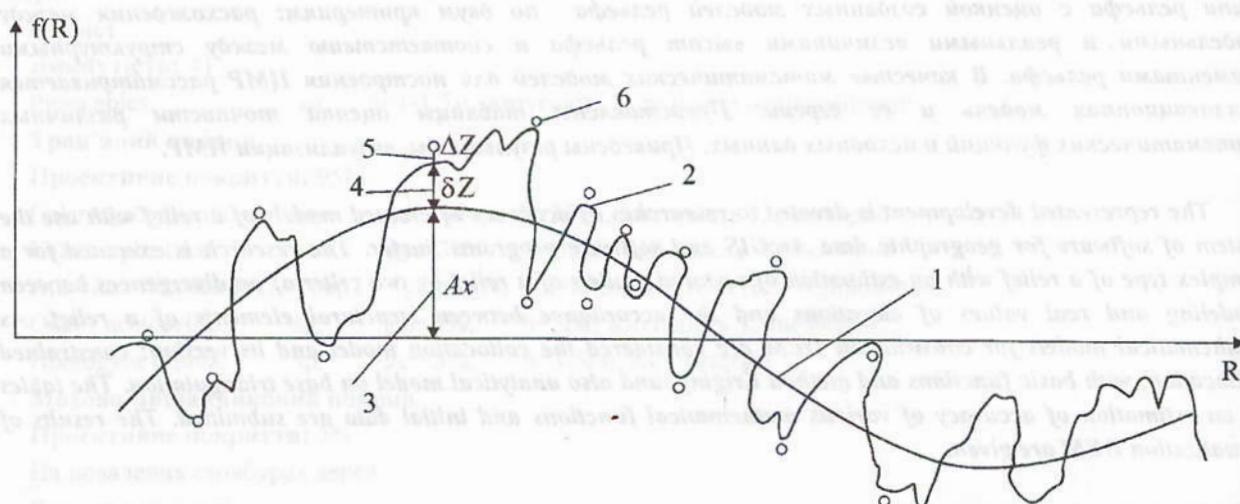


Рис. 1. Зміст моделі колокації в побудові ЦМР.

В моделі колокації для отримання незміщених оцінок з мінімальною дисперсією математичне сподівання повинно дорівнювати: $E(\delta Z) = 0$, $E(\Delta Z) = 0$.

На відміну від вживаних для апроксимації рельєфу аналітичних функцій, які моделюють тренд або тренд і сигнал разом, за методом колокації сигнал визначається як окрема величина як в точках опори, так і в прогнозованих інтерполяційних точках. Тобто, колокація передбачає визначення оцінок параметрів, величин сигналів у точках спостереження і в точках визначення або прогнозу. Для отримання розв'язку з мінімальними дисперсіями помилок повинні бути задані коваріаційні матриці вимірюваного вектора C_{zz} ,

сигналу $C_{\delta Z \delta Z}$ і взаємна коваріаційна матриця сигналів вимірювання δZ і прогнозу $\delta Z_p - C_{\delta Z \delta Z_p}$, а також коваріаційна матриця шуму $C_{\Delta Z \Delta Z}$.

Тоді розв'язок рівняння (1) за принципом

$$\delta Z^T C_{\delta Z \delta Z}^{-1} \delta Z + \Delta Z^T C_{\Delta Z \Delta Z}^{-1} \Delta Z = \min \quad (2)$$

дає оцінки для x і δZ .

$$x = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} Z, \quad (3)$$

$$\delta Z = C_{\delta Z \delta Z} C^{-1} (Z - Ax), \quad (4)$$

$$\delta Z_p = C_{\delta Z \delta Z_p} C^{-1} (Z - Ax) \quad (5)$$

де $C = C_{ZZ} = C_{\delta Z \delta Z} + C_{\Delta Z \Delta Z}$.

В статті [11] вказано, що колокацію за м.н.к. можна застосовувати, якщо вихідні точки розподілені нерівномірно. Така задача виникає при моделюванні рельєфу на регулярній ЦМР за картометричними даними. Найбільшою проблемою колокації є отримання коваріаційної функції, за якою визначають коваріаційну матрицю.

Через недостатню кількість даних для отримання коваріаційної функції у практиці розв'язання різноманітних інтерполяційних задач, в тому числі і побудови ЦМР, використовують видозмінену колокаційну модель, знану як метод Крайгінга. Найширше його використовують для розв'язування геостатистичних задач. Алгоритм методу Крайгінга складається з двох етапів: на основі просторової структури даних отримання варіограм, яка виражає структурні характеристики поля, і за коваріаційними залежностями між відмітками точок визначення відмітки прогнозованої точки.

Функцію розсіювання або варіограму визначають через значення просторової змінної із виразу [4]:

$$\gamma(h) = 0,5E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \quad (6)$$

або

$$\gamma(h) = C(0) - C(h), \quad (7)$$

де $C(0)$ – дисперсія; $C(h)$ – коваріація, які залежать від відстані h .

В [11] вказано, що колокація можлива тоді, коли структури скалярного поля малі по відношенню до розмірів ділянки, за якою визначали коваріаційну функцію. Якщо це положення порушене, то слід перейти до колокації в просторі Гільберта з відтворювальними ядрами.

Формули колокації в просторі Гільберта з відтворювальним ядром мають ту саму структуру – коваріаційну функцію замінюють відтворювальним ядром.

Як відтворювальні ядра використовують аналітичні функції: диференційні сплайні, мультиквадрики, інші радіальні функції [7].

Якщо позначити Z_p – вектор визначуваних параметрів інтерполяції, то через вектор вимірюваних значень Z отримаємо:

$$Z_p = Q_p Q^{-1} Z, \quad (8)$$

де Z – вектор вимірюваних в n опорних точках значень, Q_p – матриця розміру $m \times n$, m – кількість визначуваних точок, n – кількість заданих точок, Q – матриця розміру $n \times n$.

Елементами матриць Q є значення радіальних базисних функцій.

У мультиквадриковому методі апроксимації елементи матриць визначаються із співвідношень:

$$Q_{ij} = \sqrt{S_{ij}^2 + B} \text{ або } Q_{ij} = S_{ij}^2 + B, \quad (9)$$

де S_{ij} – відстань між точками i і j , B – параметр згладжування.

У логарифмічному мультиквадрику квадрика запишується:

$$Q_{ij} = \ln \sqrt{(S_{ij}^2 + B)}, \quad (10)$$

Якщо коваріаційну функцію замінюють диференційним сплайном [6], то елементи коваріаційної матриці визначають із співвідношения

$$Q_{ij} = S_{ij}^2 \ln S_{ij}^2 \quad (11)$$

Після вилучення із вектора Z систематичної частини Ax вираз (8) запишемо:

$$\Delta Z_p = Q_p Q^{-1} (Z - Ax), \quad (12)$$

де A – матриця розміру $n \times r$, яка характеризує тренд, апроксимований поліномом, r – кількість членів полінома.

Параметр x визначають із розв'язку системи рівнянь поправок:

$$v = Ax - Z.$$

Вектор

$$Z_p = A_p x + Q_p Q^{-1} (Z - Ax), \quad (13)$$

де A_p – матриця розміру $m \times r$.

Експериментальні дослідження.

Експериментальні дослідження проведено з метою виявлення впливу різних чинників: щільноти вихідної інформації, кількості точок для моделювання локальної ділянки, типу математичної функції, інтервалу дискретизації побудови ЦМР на точність моделювання; здійснення порівняльного аналізу цифрового моделювання рельєфу з використанням програмного пакету Surfer та геоінформаційної системи ArcGIS.

Дослідження точності побудови ЦМР виконано для ділянки із складним рельєфом, який належить до третього типу [1]. Для цього використано дані цифрування ізоліній карти масштабу 1:50000 з перерізом рельєфу 10 м сканером КФС "Дельта".

Ділянка цифрування топографічної карти має розмір 18 см x 16 см на карті, перепад висот 195 м (від 105 до 300 м), рельєф складний, від щільно перерізаного, до 20 орографічних ліній на 1 км², з максимальними кутами нахилу схилів – 28°, до рівнинних з кутами нахилу схилів 0,95°. Територія зірзана ріками з крутими берегами.

Ділянку моделюваної карти представлено на рис. 2 у вигляді 3D-моделі. На ділянці оцифровано 3700 вихідних точок. Вихідна інформація включала точки ізоліній набрані через 1 мм, а на їх вигинах щільніше до 0,7 мм; для спокійних ділянок рельєфу на відстанях не менше, ніж 1 см, і характерні точки, підписані на карті. Контрольні точки для оцінки точності результатів моделювання вибиралися на крутих і пологих схилах, по 60 для кожного випадку. Побудову ЦМР здійснено за допомогою пакета Surfer 7.

Для математичного моделювання використано як модифікації колокаційної моделі: метод Крайгінга, мультиквадрикову функцію, мультилогарифмічну функцію, натуральний кубічний сплайн, напружений сплайн ("тонка тарілка"), а також функцію широко вживану для побудови ЦМР – тріангуляцію. Дослідження проведено за різної кількості точок для визначення вузла регулярної моделі: 8, 4 і 1 в октанти.

На основі кореляційно-спектрального аналізу для рельєфу цього типу попередньо встановлено [8], що інтервал дискретизації ЦМР становить 0,5 мм в масштабі карти, тобто 25 м.

Результати експериментальних досліджень математичного моделювання наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Оцінка точності цифрового моделювання рельєфу з використанням програмного пакету Surfer

Метод моделювання	Тип варіограми, функція виключення тренду	Кількість точок для моделювання					
		8 в октанті		4 в октанті		1 в октанті	
		рівнинні ділянки	крути схили	рівнинні ділянки	крути схили	рівнинні ділянки	крути схили
		Середні квадратичні помилки, м					
Крайгінг	лінійна	2,00	2,97	1,89	3,00	1,83	3,27
	експоненційна	2,00	2,96	1,89	3,00	1,83	3,27
Універсальний Крайгінг	лінійна функція	1,54	2,88	1,52	2,98	1,49	3,18
	квадратична функція	1,67	2,87	1,76	2,85	2,27	3,34
Мультиквадрик		2,05	3,12	1,93	3,15	1,87	3,46
Мультилогарифм		2,01	3,18	2,00	3,19	1,95	3,30
Натур. кубічний сплайн		3,85	2,67	4,00	2,69	1,95	2,99
Сплайн поверхні (напружений)		2,75	2,68	2,90	2,68	1,81	3,01
Тріангуляція		2,13	3,28				

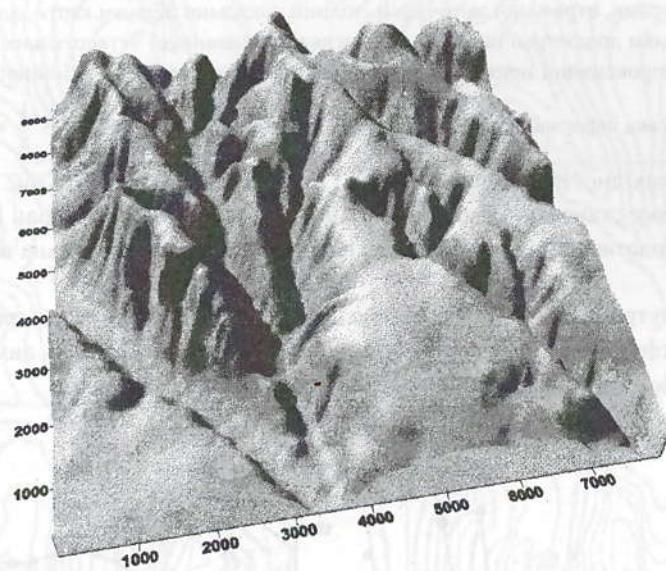


Рис. 2. 3-D модель ділянки.

Перевагою методу Крайгінга перед іншими методами є можливість проводити аналіз вигляду варіограм і внутрішньої оцінки точності. На рис. 3 подано карти ділянок середніх квадратичних помилок для значень $\sigma_Z \geq 3$ м (показані штрихуванням), отриманих за співвідношенням:

$$\sigma_{Z_k}^2 = C_k - \sum_{j=1}^n W_j C_{kj} - \lambda,$$

де W_j – ваги, з якими вихідні точки входять у визначувану точку, λ – множник Лагранжа [3].

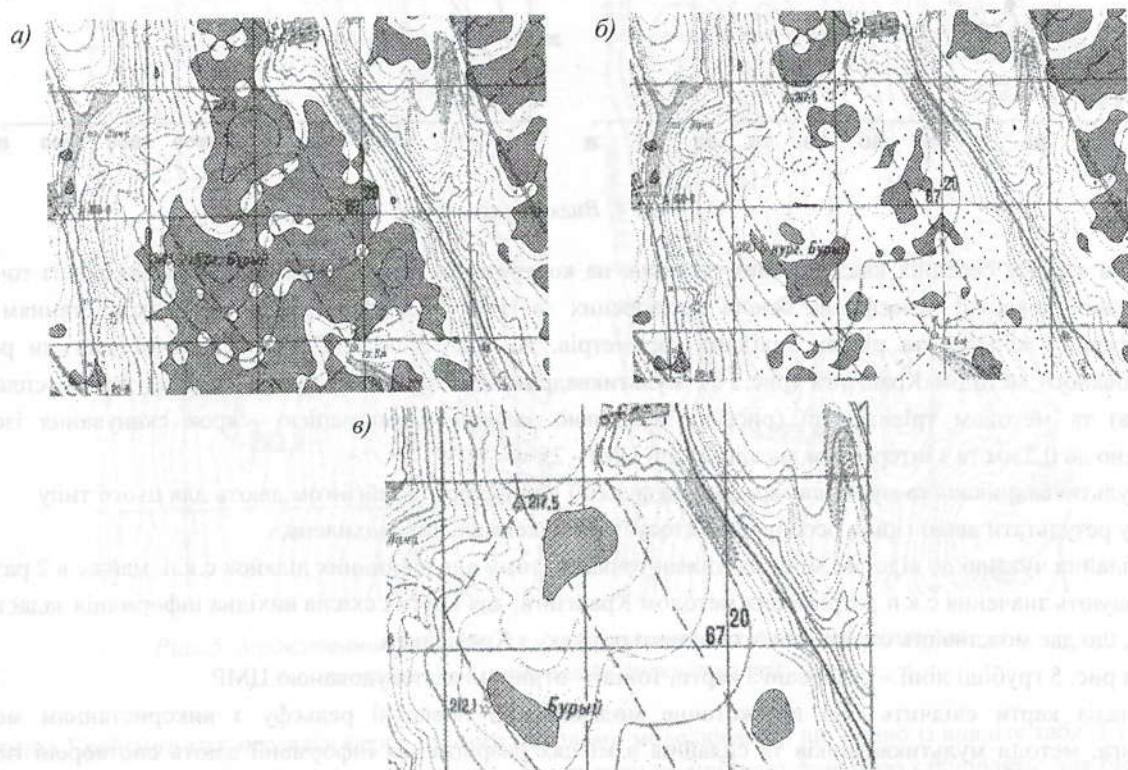


Рис. 3. Внутрішня оцінка точності за різними умовами побудови моделі методом Крайгінга.

Карти подано для рівнинної ділянки із значним до 4 см закладенням горизонталей, складними мікроформами: а) з використанням лінійної варіограми, отриманої за точками ізоліній локальної ділянки карти, для апроксимації використано 4 точки в октанті; б) із введенням додаткової інформації у вигляді половинних і четверткових ізоліній у місцях із значним закладенням ізоліній, умови апроксимації попередні; в) із використанням глобальної лінійної варіограми, побудованої за всіма точками ділянки. Додаткова інформація у цьому випадку дозволяє отримувати $\sigma_Z \leq \frac{1}{3}$ перерізу рельєфу.

Недостатня кількість вихідної інформації впливає і на вигляд варіограм. На рис. 4 подано варіограми для цієї ж ділянки: а) для випадку сканованих ізоліній – суцільна лінія (умови побудови ЦМР попередні – 4 точки в октанті); для випадку з додатковою інформацією – штрихова лінія; б) глобальна варіограма, побудована за всіма точками ділянки.

Попередній аналіз внутрішньої точності апроксимацій, як і вигляду варіограм дозволяє в місцях із складними формами рельєфу з розрідженою інформацією шляхом додавання вихідних точок або вибору відповідної варіограми здійснити моделювання поверхні стабільніше і точніше.

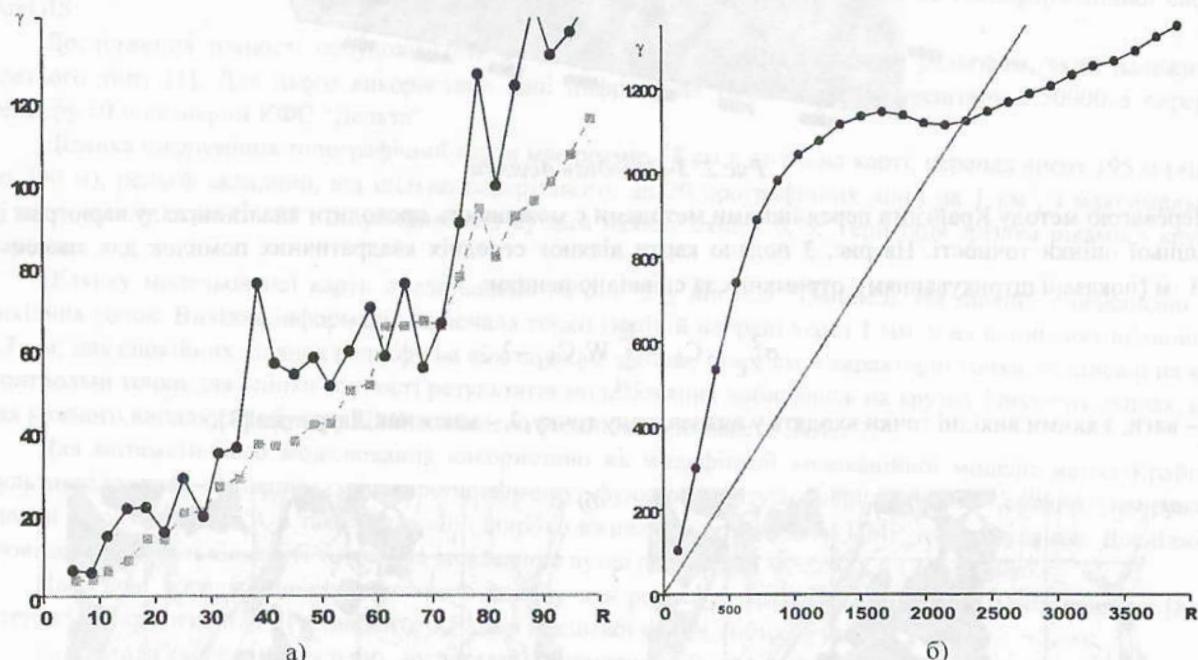


Рис. 4. Вигляд варіограм.

Крім аналізу середніх квадратичних помилок на контрольних точках (бл. 1), проведено аналіз точності побудованої поверхні рельєфу на основі відтворених за ЦМР ізоліній, отриманих з використанням різних математичних моделей та різних вихідних параметрів. На рис. 5 подано вікно складної частини рельєфу, модельованого методом Крайгінга (рис. 5 а), мультиквадрикою функцією (рис. 5 б), напруженим сплайнам (рис. 5 в) та методом тріангуляції (рис. 5 г) за щільно заданою інформацією – крок сканування ізоліній зменшено до 0,5 мм та з інтервалом дискретизації ЦМР – 25 м.

Мультиквадрикова та мультилогарифмічна функції порівняно з Крайгінгом дають для цього типу рельєфу результати дещо гірші, особливо це стосується максимальних відхилень.

Сплайні чутливі до відстані між вихідними точками, тому для рівнинних ділянок с.к.п. майже в 2 рази перевищують значення с.к.п., отриманих методом Крайгінга; для крутых схилів вихідна інформація задається щільно, що дає можливість отримати с.к.п. одного порядку з Крайгінгом.

На рис. 5 грубіші лінії – скановані з карти, тонші – отримані за побудованою ЦМР.

Аналіз карти свідчить про високоточне моделювання поверхні рельєфу з використанням методу Крайгінга; методи мультиквадрик та сплайнів в місцях розрідження інформації дають спотворені ізолінії (рис. 5 б і 5 в); метод тріангуляції дає спотворення побудови ізоліній на структурних лініях, де інформація не задавалась.



Рис. 5. Моделювання рельєфу із щільно заданою вихідною інформацією та оптимальним інтервалом дискретизації 25 м.

Метод Крайгінга має переваги перед іншими методами моделювання, що видно із аналізу табл. 1 і рис. 5 (с.к.п. моделювання методом Крайгінга з виключенням тренду за лінійною функцією становлять: для рівнинних ділянок – 1,5 м; для крутіх схилів – 2,9 м). Відповідно для мультиквадрикового методу – 2,0 і 3,1 м; сплайнів “тонка тарілка” – 2,8 і 2,7 м. Тип варіограми за однакової кількості вихідних точок на середні квадратичні

помилки контрольних точок практично не впливає (див. лінійна і експоненційна варіограми). Що ж стосується кількості точок для апроксимації, то однотипними, враховуючи точність визначення середніх квадратичних помилок ($\sigma_{c.k.p}$ для рівнинних ділянок $\sim 0,13\text{--}0,18$ м і $\sigma_{c.k.p}$ для крутых схилів $\sim 0,26\text{--}0,29$ м) є 8 і 4 точки в октанті, перехід до 1 точки в октанті дещо погіршує результат апроксимації точок крутых схилів.

З метою порівняння точності моделювання рельєфу ідентичними методами, реалізованими у програмному пакеті Surfer та в інформаційній системі ArcGIS, ЦМРД для цієї ж ділянки побудовано з використанням додатку Spatial Analyst інформаційної системи ArcGIS. Оскільки в Spatial Analyst відсутня опція спеціального розташування вихідних точок стосовно визначуваної (квадрант, октант), то вибір вихідних точок здійснювався тільки за їх кількістю та радіусом. Контрольними точками були ті ж 60 точок в рівнинних ділянках і 60 точок на крутых схилах.

Результати обчислень наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Оцінка точності цифрового моделювання рельєфу з використанням геоінформаційної системи ArcGIS

Метод моделювання	Тип варіограми, функція виключення тренду	Кількість точок для моделювання					
		12		24		36	
		рівнинні ділянки	крути схили	рівнинні ділянки	крути схили	рівнинні ділянки	крути схили
Середні квадратичні помилки, м							
Крайгінг	лінійна	6.46	8.20	10.38	9.07	12.46	9.80
	експоненційна	5.49	7.48	7.22	7.94	7.56	8.24
Універсальний Крайгінг	лінійна функція	5.63	7.38	10.16	8.77	12.97	9.90
	квадратична функція	3.55	6.74	3.71	7.17	3.92	7.53
Регуляризований сплайн	0	4.18	6.77	3.92	6.72	3.63	6.72
	0.1	6.48	6.88	6.42	6.89	6.87	6.90
	0.5	7.02	6.86	6.92	6.86	6.73	6.83
Сплайн поверхні напружений	0	3.55	6.75	3.59	6.71	3.40	6.73
	1	3.01	6.73	3.27	6.70	3.18	6.71
	5	2.36	6.70	2.77	6.69	2.83	6.70
	10	2.17	6.68	2.50	6.69	2.60	6.69
Тріангуляція		2.90	1.82				

Висновки, які можна зробити, аналізуючи дані таблиці 2, є несподіваними: метод Крайгінга дає результати моделювання в 2-3 рази гірші порівняно з тріангуляцією.

Середні квадратичні помилки для оптимальні кількості точок (12 точок) становлять для методу Крайгінга (лінійна варіограма): для рівнинних ділянок – 6,5 м; для крутых схилів – 8,2 м; для універсального Крайгінга з виключенням тренду: за лінійною функцією – 5,6 м і 7,4 м; за квадратичною функцією – 3,6 м і 6,7 м відповідно для рівнинних ділянок і крутых схилів. Це можна пояснити реалізацією методу за спрощеним алгоритмом.

В системі ArcGIS реалізовано дві модифікації методу сплайнів: регуляризований і напружений. Моделювання рельєфу з використанням регуляризованого сплайна з вагою 0,1 виконано з точністю: с.к.п. для рівнинних ділянок – 4,2 м, для крутых схилів – 6,8 м; з використанням напруженого сплайна з вагою 10: с.к.п. для рівнинних ділянок – 2,2 м, для крутых схилів – 6,7 м.

Моделювання поверхні із застосуванням методу тріангуляції в системі ArcGIS для даної ділянки отримано з точністю: для рівнинних ділянок – 2,9 м, для крутых схилів – 1,8 м, що свідчить про переваги даного алгоритму моделювання рельєфу.

Порівняння результатів табл. 1 і 2 показує, що на крутых схилах отримано найточніші результати з використанням методу тріангуляції у програмному середовищі ArcGIS.

Висновки

Аналіз результатів моделювання рельєфу, проведений за контрольними точками і за відтвореними ізолініями з використанням програмного пакту Surfer та геоінформаційної системи ArcGIS, дозволяє зробити такі висновки.

1. Метод Крайгінга, реалізований в програмному пакеті Surfer, за оптимального вибору вихідних параметрів картометричних моделей дозволяє здійснити високоточне моделювання рельєфу. Оптимальними параметрами моделювання для складного рельєфу є: щільність вихідної інформації на вигинах ізоліній – 0,5 мм; кількість точок для моделювання локальної ділянки – 8 в октанті; інтервал дискретизації ЦМР – 0,5 мм.

2. Мультиквадрикова та мультилогарифмічна функція порівняно з Крайгінгом дають для цього типу рельєфу результати в 1,3-1,4 рази гірші, особливо це стосується максимальних відхилень.

3. Сплайні чутливі до відстані між вихідними точками, тому для рівнинних ділянок с.к.п. майже в 2 рази перевищують с.к.п., отриманих методом Крайгінга; для крутых схилів вихідна інформація задається щільно, що дає можливість отримати с.к.п. одного порядку з Крайгінгом.

4. Використання тріангуляції для побудови ЦМР за картометричними даними для рівнинних ділянок в цьому програмному пакеті дає результати гірші від методу Крайгінга в 1,1-1,4 рази, збільшуються також максимальні відхилення на точках.

5. Аналіз точності побудованої ЦМР методом Крайгінга за відтвореними ізолініями свідчить про згладжування форм рельєфу за значної його зрізаності, як і невідповідного до форм рельєфу проведення ізоліній в ділянках глибоких улоговин з крутими берегами у випадках розрідженої вихідної інформації та завищеного інтервалу дискретизації моделі. В останньому випадку через згладжувальну функцію відтворення рельєфу утворюються спотворені ізолінії у вигляді замкнених кривих. За таких випадків вихідну інформацію необхідно набирати особливо ретельно, а інтервал дискретизації визначати, користуючись принципами кореляційно-спектрального аналізу.

6. У геоінформаційній системі ArcGIS моделювання рельєфу доцільно здійснювати з використанням методу тріангуляції.

Література

1. Бойко А.В. Методы и средства автоматизации топографических съемок. – М.: Недра, 1980. – 222 с.
2. Бурштинська Х.В. Колокація з умовами у цифровому моделюванні рельєфу // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2002. – Вип. 62. – С. 103-110.
3. Бурштинська Х.В., Заєць О.С. Теоретичні основи та експериментальні дослідження математичних функцій для побудови цифрових моделей рельєфу // Вісник геодезії і картографії. – 2002. – № 4. – С. 32-37.
4. Девис Дж. Статистика и анализ геологических данных. – М.: Мир. – 1997. – 571 с.
5. Мориц Г. Современная физическая геодезия. Пер. с англ. – М.: Недра. – 1983. – 392 с.
6. Сербенюк С.Н., Кошель С.М., Мусин О.Р. Методы моделирования геополей по данным в нерегулярно расположенных точках // Геод. и картогр. – 1990. – № 11. – С. 31-35.
7. Burshtynska Kh., Zajac A. Application id differential splines for relief simulation // ISPRS Commission IV Symposium of geospatial theory, processing and application, 8-12 July 2002. – Ottawa (Canady). – P. 509-514.
8. Burshtynska Kh., Tumska O., Lelukh D. Computer Technology of Determination of Area of Digital Elevation Model // 19th ISPRS Congress, vol. XXXIII Work, Gr IV. – Amsterdam (Holland). – 2000. – P. 148-154.
9. Cooper M.A.R., Cross F.A. Statistical concepts and their application in photogrammetry and surveying (continued) // Photogramm. Rec. – 1991. – № 77. – P. 645-678.
10. Dermanis A. Kriging and collocation – a Comparison // Manuscr. geol. – 1984. – № 3. – P. 159-167.
11. Keller W. Interpolation irregulär verteilter Daten durch Kollokation in kernreproduzierenden Hilberträumen // Vermessungstechnik. – 1990. – № 6. – P. 196-199.
12. Schaffrin B. An alternative approach to robust collocation // Bull. geod. – 1989. – № 4. – P. 395-404.