УДК 528.33

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЕСОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Проектирование геодезических сетей специального назначения заданной формы и при неизвестных весах измерений требует, чтобы точность заданных параметров сети удовлетворяла заранее поставленным условиям, а затраты на выполнение полевых работ были минимальными. Эту задачу в общем виде можно представить как решение задачи нелинейного программирования [1—4]:

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i = \min; \tag{1}$$

$$p_{i,\min} \leqslant p_i \leqslant p_{i,\max}, \quad i = 1, 2, \cdots, n; \tag{2}$$

$$\varphi_j(K_X) \leqslant M_j^2, \quad j = 1, 2, \cdots, r, \tag{3}$$

где c_i, p_i — коэффициенты выгодности и веса проектируемых измерений; M_j — допустимые значения средних квадратических ошибок заданных параметров сети, действительные значения которых в виде функций от проектируемых весов измерений для ограничений (3), основанных на критериях типа G-оптимальности, составляют

$$\varphi(K_X) = fK_X f^{\mathrm{T}} = fN^{+} f^{\mathrm{T}} = f(A^{\mathrm{T}} PA)^{+} f^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Здесь f — строка коэффициентов весовой функции; A и P — матрица коэффициентов уравнений поправок параметрического способа уравнивания и весовая матрица проектируемых измерений; $K_X = N^{+} = (A^{\mathrm{T}}PA)^{+}$ — ковариационная матрица вектора координат X определяемых пунктов сети, являющаяся псевдообратной N^{+} к матрице нормальных уравнений N ранга ρ.

Другие типы критериев и соответствующие им выражения можно найти в [4, 6].

Решение задачи (1)—(3) наиболее обще и эффективно можно выполнить по алгоритмам метода штрафных функций [1—3], но в этом случае требуется иметь в наличии формулы для аналитического вычисления производных от функций (4). Требуемые формулы для вычисления первых производных для несвободных геодезических сетей, когда матрица N имеет полный ранг, для различных функций даны в [1, 6]. В случае оптимизации свободных сетей можно применить более универсальные формулы [3, 4], использующие спектральное разложение матрицы N и пригодные для дифференцирования ограничения A-, D-, E-, I- и G-оптимальности.

Недостаток упомянутых формул в случае G-ограничений — необходимость вычислений производных от собственных векторов, что обусловливает существенное увеличение объема вычислений. В плановой сети этот объем можно уменьшить, если предварительно выполнить поворот осей координат, направив одну из них, например x, по направлению заданной функции или группы функций ограничений (4). Тогда в строке коэффициентов f элементы, содержащие $\sin \alpha' = 0$, где α' — дирекционный угол заданной функции в новой системе координат, можно не учитывать и формулы существенно упростятся.

Пусть, например, задано ограничение на ошибку положения одного или нескольких пунктов по направлению α, т. е. строка

$$f = (\ldots, 0, \cos \alpha, \sin \alpha, 0, \ldots)$$

имеет лишь два ненулевых элемента. После преобразования координат получаем ошибку положения пункта по направлению α' и первую производную от нее по весу p_k с использованием формул из [4] в новой системе координат:

$$m^2_{\alpha'} = m^2_{x'} = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i^{-1} z^2_{iq}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial m^2_{x'}}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i^{-1} z_{iq} \left(2 \frac{\partial z_{iq}}{\partial p_k} - \lambda_i^{-1} z_{iq} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \right), \tag{6}$$

так как строка коэффициентов весовой функции примет вид

$$f' = (\ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

и имеем лишь единственный ненулевой коэффициент, равный 1. В (5)—(6) λ_i и $Z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{im})^{\mathrm{T}}$ — собственные значения и векторы матрицы N в новой системе координат; m — удвоенное число определяемых пунктов; q — номер координаты x в столбце X.

При большом числе ограничений типа (4) и различных направлениях заданных функций указанный прием может не дать желаемого эффекта, поэтому получим более простые формулы для вычисления первых производных в свободных сетях по типу формул, используемых в сетях несвободных [2, 6]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}=f\frac{\partial N^{-1}}{\partial p_k}f^{\mathrm{т}}=-fN^{-1}\frac{\partial N}{\partial p_k}N^{-1}f^{\mathrm{т}}=-fN^{-1}N_kN^{-1}f^{\mathrm{т}},\qquad(7)$$

где $N_k=a_k^{\mathrm{т}}a_k$; a_k — строка коэффициентов k-го уравнения поправок. Подобных формул или рекомендаций для свободных сетей нами в геодезической литературе не обнаружено.

При выводе воспользуемся представлением псевдообратной матрицы [5]

$$N^{+}=(N+BB^{\mathrm{т}})^{-1}-BB^{\mathrm{т}}=N_0^{-1}-BB^{\mathrm{т}},\qquad(8)$$

где B — матрица ортонормированных собственных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям. Эти векторы, как известно, не зависят от весов измерений, поэтому

$$\frac{\partial N^{+}}{\partial p_k}=\frac{\partial N_0^{-1}}{\partial p_k}=-N_0^{-1}\frac{\partial N_0}{\partial p_k}N_0^{-1}=-N^{+}N_kN^{+},\qquad(9)$$

так как $\dfrac{\partial N_0}{\partial d_k}=\dfrac{\partial N}{\partial p_k}=N_k$ и $N_kB=0$.

Тогда $$\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}=-fN^{+}N_kN^{+}f^{\mathrm{т}}=-(fN^{+}a_{к}^{\mathrm{т}})^2.\qquad(10)$$

Из (7)—(10) следует, что при оптимизации весов измерений в свободных сетях можно пользоваться для вычисления производных от критериев G-оптимальности практически теми же формулами, что и в несвободных сетях. Формулу (6) применительно к алгоритму [3] в этом случае можно заменить формулой

$$\frac{\partial m_{x'}^2}{\partial p_k}=-\left(\sum_{l=1}^{\rho}\lambda_l^{-1}z_{lq}\sum_{a_{kl}\neq 0}z_{ll}a_{kl}\right)^2,\qquad(11)$$

объем вычислений по которой в несколько раз меньший, что подтвердили и эксперименты на ЭВМ, а результаты тождественны.

Для ошибки положения пункта по любому направлению α, не совпадающему с направлением осей координат, формулу в общем виде можно записать так:

$$\frac{\partial m_{\alpha}^2}{\partial p_k}=-\left(\sum_{l=1}^{\rho}\lambda_l^{-1}(z_{lq}\cos\alpha+z_{ls}\sin\alpha)\sum_{a_{kl}\neq 0}z_{ll}a_{kl}\right)^2,\qquad(12)$$

где индексы q и s соответствуют для заданного пункта номерам координат x и y в векторе X.

Изложенная методика, представленная выше формулами (5) и (11), реализована в настоящее время на ЕС ЭВМ в рамках алгоритма [3]. Алгоритм в случае ограничений только типа A- и G-оптимальности целесообразно также модернизировать, заменив в нем нахождение псевдообратной матрицы не через спектральное разложение, а по известной рекуррентной формуле

$$N_j^+ = N_{j-1}^+ - \frac{N_{j-1}^+ a_j^{\tau} a_j N_{j-1}^+}{p_j^{-1} + a_j N_{j-1}^+ a_j^{\tau}}.$$

Для ограничений E-оптимальности в этом случае достаточно найти лишь максимальное собственное значение $\lambda_1(N^+)$ и соответствующий собственный вектор.

Эксперименты на ЭВМ подтвердили также целесообразность при оптимизации плановых сетей с применением метода штрафных функций устанавливать параметр штрафа γ в формуле преобразованной целевой функции

$$\sum_{i=1}^{n} c_i p_i + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{r} (\min[0, M_j^2 - \varphi_j])^2 = \min$$

таким, «чтобы влияние затрат и штрафных членов было примерно одинаковым» [2].

1. *Афонин К. Ф.* Определение оптимальной точности планируемых измерений при проектировании специальных геодезических сетей // Инженерная геодезия. 1984. № 27. С. 3—6. 2. *Афонин К. Ф.* Предвычисление точности геометрического нивелирования // Геодезия и картография. 1987. № 2. С. 20—22. 3. *Герасименко М. Д.* Оптимизация точности измерений в геодезических сетях // Геодезия и картография. 1985. № 2. С. 10—14. 4. *Герасименко М. Д.* Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. Владивосток, 1983. 5. *Маркузе Ю. И.* Взаимосвязь процедур уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. № 3. С. 3—14. 6. *Тамутис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., 1979.

Статья поступила в редколлегию 04. 08. 88