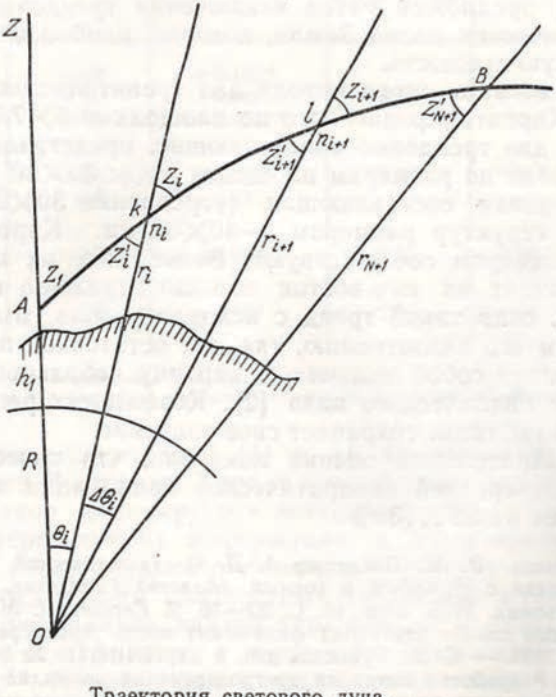
УДК 528.3

Ф. Д. ЗАБЛОЦКИЙ, А. Е. ФИЛИППОВ, Л. С. ХИЖАК

ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ РЕФРАКЦИИ В СЛУЧАЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В настоящей статье предлагаем численно-аналитический метод приближенного определения координат точек световой кривой, когда показатель преломления n является функцией полярных координат r, θ.

Пусть на рисунке ось OZ полярной системы координат r, θ совпадает с отвесной линией в пункте наблюдения A. Начало



Траектория светового луча.

системы находится в точке O на расстоянии $R+h_1$ от точки A, где R — средний радиус Земли и h_1 — высота точки над сферой радиуса R. Так как, по предложению, n является функцией только радиуса-вектора r и полярного расстояния θ, то световая кривая будет лежать в плоскости AOB, проходящей через визирную цель B.

Разобьем сектор AOB на N узких секторов с таким расчетом, чтобы в каждом из них с практической точностью показатель преломления можно считать не зависящим от θ.

Рассмотрим сектор с номером i ($i=1, N$) и центральным углом $\Delta\theta_i$. Разложим правую часть уравнения световой кривой $r=f(\theta)$ в ряд Тейлора, ограничиваясь членом, содержащим $\Delta\theta_i^2$.

$$r_{i+1}=r_i+\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)_i\Delta\Theta_i+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)_i\Delta\Theta_i^2. \qquad (1)$$

Выражение для первой производной от r по θ имеет вид

$$\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)=\frac{r_i}{\operatorname{tg} z_i},$$

где z_i — зенитное расстояние визирной цели B в точке k (см. рисунок).

Для получения второй производной $\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)_i$ используем инвариантные соотношения рефракции

$$nr\sin z=\text{const}, \qquad (2)$$

являющиеся первым интегралом уравнения Эйлера для сферической модели атмосферы. Дифференцируя (2), получаем

$$\left(\frac{d^2r}{d\Theta^2}\right)_i=\frac{1}{n_ir_i}\left[\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)_i^2((n_r)_ir_i+2n_i)+(n_r)_ir_i^3+n_ir_i^2\right], \qquad (3)$$

где $(n_r)_i$ — вертикальный градиент показателя преломления в точке k сектора i. При известном распределении показателя преломления n в секторе i как функции от r и известных r_i, z_i и $\Delta\theta_i$ выражения (1) определит радиус-вектор r_{i+1} точки l световой кривой, а полярное расстояние θ_{i+1} этой точки опишем формулой

$$\theta_{i+1}=\theta_i+\Delta\theta_i.$$

Используя (2), найдем в точке l сектора i направление касательной к световой кривой:

$$\sin z'_{i+1}=\frac{r_i\sin z_i\, n_i}{r_{i+1}\, n'_{i+1}},$$

где n' — показатель преломления в точке l, который можно вычислить по формуле Даля—Гладстона, используя параметры распределения температуры T, давления P и влажности e с высотой в секторе i.

Для вычисления зенитного расстояния z_{i+1} для той же точки, но в секторе $i+1$, необходимо учесть преломление луча на границе секторов i и $i+1$. По закону Снеллиуса получим

$$\cos z_{i+1}=\cos z'_{i+1}\frac{n'_{i+1}}{n_{i+1}}.$$

Теперь имеем необходимые начальные данные r_{i+1}, θ_{i+1}, z_{i+1} для выполнения аналогичных вычислений в секторе $i+1$.

В начальной точке A световой кривой должны быть известны z_1 (из измерений), $r=R+h$, $\theta_i=0$.

По завершении последнего шага интегрирования ($i=N$) получаем полярные координаты r_{N+1}, θ_{N+1} визирной цели и углы рефракции ρ_1, ρ_{N+1} соответственно в точках A и B по формулам

$$\Theta_{N+1} = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta\Theta_i,$$

$$x = r_{N+1} \sin \Theta_{N+1},$$

$$y = r_{N+1} \cos \Theta_{N+1} - r,$$

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

$$\rho_1 = 90° - z_1 - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

$$\rho_{N+1} = \Theta_{N+1} + z'_{N+1} - 90° + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Теоретические основы метода апробированы на моделях.

Статья поступила в редколлегию 29. 04. 89