

ПОБУДОВА АЛЬТИМЕТРО-ГРАВІМЕТРИЧНОГО ГЕОІДА МЕТОДОМ СЕРЕДНЬОЇ КВАДРАТИЧНОЇ КОЛОКАЦІЇ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ

З.Р.Тартачинська

(Державний університет "Львівська політехніка")

Вступ

Проблема високоточної побудови основної рівневої поверхні – геоїда – є надзвичайно актуальною. Її розв'язуванням займається багато науково-дослідних установ в цілому світі, зокрема – Міжнародна служба геоїда, яка є складовою частиною Міжнародної асоціації геодезії.

На сьогодні розроблена низка методів, які дозволяють розв'язати проблему з тим чи іншим рівнем точності. Такі методи відрізняються як теоретичним обґрунтуванням, так і формою представлення результатів.

Аналітична форма представлення геоїда ґрунтується на апроксимації збудуючого потенціалу T наборами ортогональних або навіть неортогональних базисних функцій. Серед відповідних методів, які дають аналітичне представлення геоїда, слід відзначити метод послідовного мультипольного

аналіза [3], в основу якого покладена апроксимація збудуючого потенціалу неортогональними потенціальними функціями – потенціалами нецентрально-радіальних мультиполів. Результати, одержані при застосуванні цього метода, можна знайти в монографії [3] та в роботах [5,6].

Числова форма представлення геоїда являє собою сукупність значень висот геоїда, обчислених для вузлів деякої регулярної сітки. Серед методів, що забезпечують визначення геоїда в такій формі, відзначимо метод швидкого перетворення Фур'є [2] і метод середньої квадратичної колокації [7], який вже є класичним. Необхідно підкреслити, що незважаючи на наявність доволі великої сукупності різноманітних методів, метод колокації до сьогодні залишається чи не основним методом визначення геоїда в глобальному, регіональному та локальному масштабах.

З огляду на особливості методу середньої квадратичної колокації (детальне обговорення його теоретичних і практичних аспектів подано в монографії [7]) відзначимо деякі труднощі використання його традиційної схеми для спільної обробки різномірних за складом та точністю вихідних даних. Тим не менше, необхідність розв'язування таких проблем існує, внаслідок чого на практиці застосовуються відповідні модифікації основного методу.

В даній роботі запропонований варіант методу середньої квадратичної колокації, який дозволяє накласти додаткові умови на сукупність тих вимірів, помилками яких можна знехтувати.

Основні співвідношення

Нижче будемо дотримуватися класичного трактування [7] задачі визначення збурюючого потенціалу T за скінченною кількістю значень лінійних функціоналів L , визначених на потенціалі T [1,3,7].

Нехай маємо q_1 -вимірний вектор \mathbf{l}_1 значень лінійних функціоналів на потенціалі T , виміряних з випадковими помилками, які утворюють q_1 -вимірний вектор \mathbf{n}_1 , що характеризується коваріаційною матрицею \mathbf{C}_{nn} . Згідно з [7] рівняння спостережень матимуть вигляд

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{B}_1 T + \mathbf{n}_1, \quad (1)$$

де вектор \mathbf{B}_1 містить в собі лінійні функціонали L_i ,

$$\mathbf{B}_1^T = (L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_{q_1}). \quad (2)$$

Крім цього, нехай маємо q_2 -вимірний вектор \mathbf{l}_2 значень лінійних функціоналів на потенціалі T , випадкові помилки яких є відсутніми (або ними можна знехтувати в порівнянні з помилками \mathbf{n}_1). Тоді рівняння спостережень матимуть вигляд

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{B}_2 T, \quad (3)$$

де як і в (1)

$$\mathbf{B}_2^T = (L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_{q_2}). \quad (4)$$

Систему (3) будемо трактувати як систему додаткових умов, що накладаються на збурюючий потенціал T .

Отже, загальна система рівнянь, яку потрібно розв'язати для визначення потенціалу T , буде складатися з підсистем (1) і (3). Розв'язок її будемо шукати під умовою [7]:

$$(T, T) + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = \min, \quad (5)$$

де (T, T) є квадратом норми збурюючого потенціалу в Гільбертовому просторі з відтворюючим яд-

ром [1,3,7].

Не вдаючись тут до деталей необхідних перетворень, які прекрасно описані Г.Моріцем [7], відзначимо лише, що в нашому випадку задача мінімізації функціоналу (5) є задачею пошуку умовного екстремуму і зводиться до мінімізації функціоналу

$$\Phi = (T, T) + \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} + 2\mathbf{k}_1^T (\mathbf{B}_1 T + \mathbf{n} - \mathbf{l}_1) + 2\mathbf{k}_2^T (\mathbf{B}_2 T - \mathbf{l}_2) = \min \quad (6)$$

де \mathbf{k}_i - вектори невизначених множників Лагранжа. Розв'язком, який забезпечує мінімум функціоналу (6), буде оцінка потенціалу T :

$$\hat{T} = (\mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{B}_2^T) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де коваріаційні матриці \mathbf{C}_{ij} векторів спостережень легко одержати за відомим правилом [7] розповсюдження коваріацій

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{B}_j^T \quad (8)$$

за основною коваріаційною функцією \mathbf{K} [7] збурюючого потенціалу T . Середньо квадратична помилка оцінки (7) неважко одержати у вигляді

$$m_{\hat{T}}^2 = \mathbf{K} - (\mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{B}_2^T) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Як бачимо, одержані нами співвідношення є формально еквівалентними до співвідношень класичної схеми середньої квадратичної колокації, якщо в останніх частина елементів коваріаційної матриці помилок вимірів дорівнює нулю.

Вихідні дані

Запропонована обчислювальна схема, яка реалізує метод середньої квадратичної колокації з додатковими умовами, була застосована для побудови варіанту альтиметро-гравіметричного геоїду на акваторії Чорного моря.

До обробки було прийнято 940 даних супутникової альтиметрії GEOSAT, точність яких знаходиться в межах від ± 1 см до ± 27 см. Дані розташовані вздовж трас супутника GEOSAT, причому відстань між точками даних на одній трасі становить близько 3', а відстань між сусідніми трасами - близько 1°. Розташування даних альтиметрії показано на рис. 1.

Крім цього, були прийняті абсолютні значення сили ваги, відомі на 9 пунктах, розташованих на узбережжі Чорного моря. Їх розташування також схематично показано на рис. 1. Оскільки величини

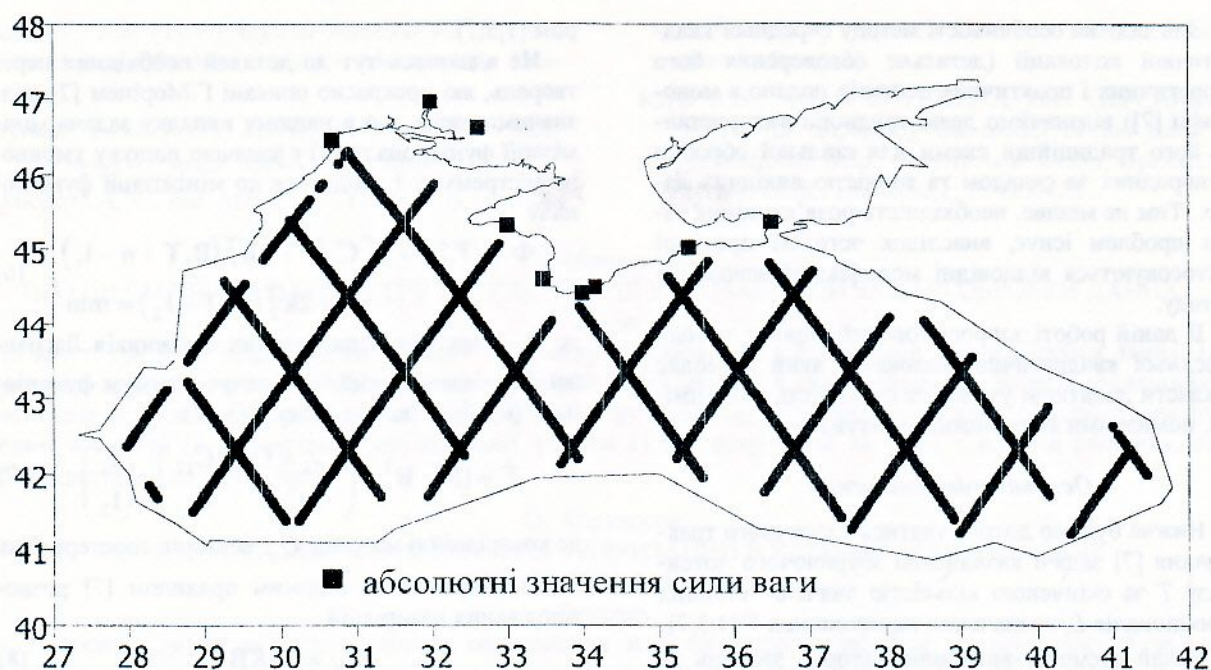


Рис. 1. Розташування вихідних даних на акваторії Чорного моря

сили ваги на обговорюваних пунктах відомі із значною точністю (відповідає вимогам до гравіметричних пунктів 1 класу), ми вирішили використати ці дані саме у формі додаткових умов (3), сподіваючись покращити визначення геоїда в прибережній зоні, де дані альтиметрії вже не можна вважати надійними.

Результати

Таким чином загальний набір даних складався з 940 значень лінійних функціоналів (1) і 9 значень лінійних функціоналів (3). Його обробка здійснювалася за традиційною схемою "видалення-відновлення" в три етапи.

На першому етапі з вихідних даних видалявся тренд моделі глобального гравітаційного поля Землі EGM96 [8], яка представлена гармонічними коефіцієнтами потенціалу до степені й порядку 360, а отже має роздільну здатність 30'x30'. Отриманий набір залишкових відхилень характеризується статистиками, поданими в таблиці 1.

На другому етапі за одержаними залишковими відхиленнями та формулами (7) – (9) виконувався прогноз залишкових висот геоїда та залишкових аномалій сили ваги у тих 4552 вузлах регулярної сітки 5'x7.5', які потрапляють на акваторію Чорного моря. Аналітичні вирази для регіональних коваріаційних функцій будувалися за методикою, що

Таблиця 1. Статистичні характеристики вихідних та прогнозованих залишкових полів висот геоїда N (в метрах) та аномалій сили ваги Δg (в мілігалах)

Статистики	Вихідні дані		Прогноз з врахуванням умов		Прогноз без врахування умов	
	N	Δg	N	Δg	N	Δg
Кількість	940	9	4552	4552	4552	4552
Мінімальне	-2.28 ± 0.01	-11.5	-3.73 ± 0.01	-81.1 ± 1.1	-3.73 ± 0.01	-81.1 ± 2.0
Максимальне	0.96 ± 0.27	19.3	1.56 ± 0.54	50.5 ± 14.2	1.56 ± 0.55	52.5 ± 14.6
Середнє	-0.79 ± 0.12	3.4	-0.66 ± 0.12	-5.0 ± 5.4	-0.65 ± 0.12	-5.0 ± 5.6
Середнє квадратичне	0.96 ± 0.13	10.0	0.90 ± 0.14	16.2 ± 5.8	0.90 ± 0.14	16.6 ± 5.9
Стандартне відхилення	0.55 ± 0.05	9.4	0.60 ± 0.07	15.4 ± 2.0	0.62 ± 0.08	15.9 ± 2.1

грунтується на використанні потенціалів радіальних мультиполів [3,4]. Статистичні характеристики прогнозованих залишкових висот геоїда та аномалій сили ваги подані в таблиці 1. Для порівняння там же подаються результати, одержані за допомогою метода колокації без використання даних абсолютних вимірів сили ваги, а отже – й без врахування додаткових умов (3).

Як бачимо, загальні статистичні характеристики полів, визначених з врахуванням та без врахування абсолютних значень сили ваги, відрізняються дуже незначно. Тим не менше, характеристики різниць цих полів, подані в таблиці 2, свідчать про суттєвий вплив інформації про абсолютні значення сили ваги, використаної у вигляді додаткових умов, як на результати визначення геоїда, так і на результати визначення аномалій сили ваги методом середньої квадратичної колокації. В будь-якому випадку, з огляду на рівень точності результатів прогнозу (табл.1) та на сучасну потребу визначення геоїда з сантиметровою точністю, нехтувати впливом такого рівня неможливо.

Таблиця 2. Характеристики різниць результатів прогнозу, одержаних з врахуванням та без врахування абсолютних значень сили ваги

Статистики	<i>N</i>	Δg
Кількість	4552	4552
Мінімальне	-1.69	-62.4
Максимальне	0.32	16.3
Середнє	-0.01	0.0
Середнє квадратичне	0.12	4.1
Стандартне відхилення	0.12	4.1

Важливим є той факт, що і у випадку висот геоїда, і у випадку аномалій сили ваги немає зміщення оцінок полів. Це дозволяє припустити, що, як ми і очікували, абсолютні значення сили ваги здійснюють свій вплив саме в прибережній зоні. Рис. 2 і рис. 3, на яких зображені ці відхилення, яскраво ілюструють характер обговорюваного впливу врахування абсолютних значень сили ваги.

Зауважимо тут, що отриманий характер впливу абсолютних значень сили ваги є аналогічним такому, одержаному в монографії [3] при побудові альтиметро-гравіметричного геоїда на акваторії Балтійського моря методом послідовного мультипольного аналізу за даними альтиметрії SEASAT з врахуванням додаткових умов на абсолютні значення сили ваги на пунктах Європейської гравіметричної мережі UEGN94. Отже, якісні характеристики ре-

зультатів даної роботи узгоджуються з отриманими незалежно результатами аналітичного представлення геоїда.

Нарешті, на третьому етапі тренд моделі EGM96 був відновлений в одержаних 4552 точках прогнозованих залишкових полів. Таким чином був побудований варіант альтиметро-гравіметричного геоїда на акваторії Чорного моря. Висоти геоїда над еліпсоїдом загальноземної геодезичної референц-системи GRS80 змінюються від 12.17 м до 39.04 м, а оцінки середніх квадратичних помилок висот геоїда – від ± 1 см до ± 54 см. Причому, найбільші оцінки помилок мають місце біля південної границі акваторії, де не було ніяких додаткових даних, які поліпшували би надійність результатів. Схема побудованого геоїда показана на рис. 4.

Висновки

На завершення відзначимо, що в даній роботі був запропонований розв'язок задачі обробки геодезичних даних за допомогою метода середньої квадратичної колокації з додатковими умовами. Співвідношення (7) – (9) дають шуканий розв'язок для збурюючого потенціалу T і легко перетворюються для випадку будь-яких інших його трансформант.

Результати апробації розробленого метода при побудові геоїда на акваторії Чорного моря за даними супутникової альтиметрії та за абсолютними значеннями сили ваги свідчать про доцільність його використання для обробки різнородних (за складом та точністю) трансформант зовнішнього гравітаційного поля Землі.

Побудований варіант альтиметро-гравіметричного геоїда може бути використаний для подальшого вивчення основної рівневої поверхні в акваторії Чорного моря.

Подяки

Автор висловлює щирі подяки проф. Р.Раппу (Університет штата Охайо, США) і проф. Ф.Сансо (Міланська політехніка, Італія) – за надання даних альтиметрії на акваторію Чорного моря; проф. Ю.Рудацькому, проф. О.Марченко та доц. М.Йосипчуку (Державний університет “Львівська політехніка”) – за сприяння в отриманні цих даних.

Література

1. Нейман Ю.М. *Вариационный метод физической геодезии*. Недра: Москва, 1979.
2. Forsberg R. A study of terrain reduction, density

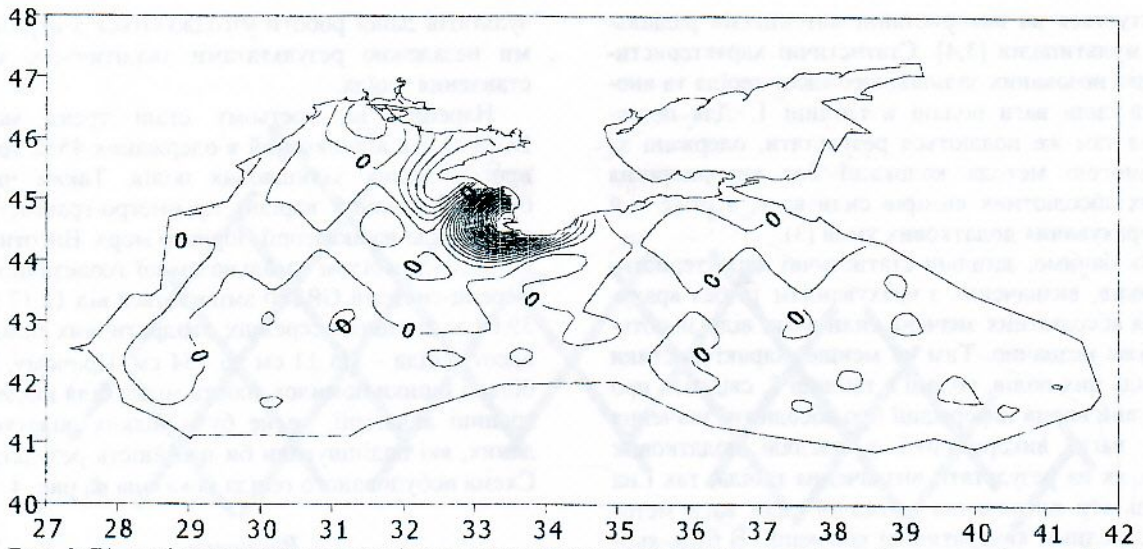


Рис. 2. Різниця прогнозованих полів висот геоїда (в сантиметрах, горизонталі проведені через 5 см)

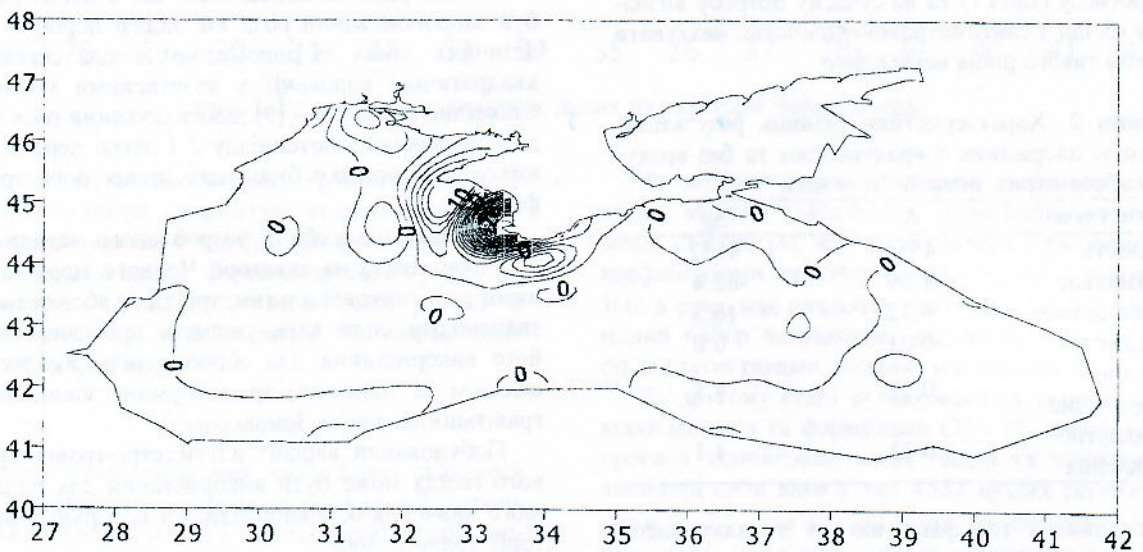


Рис. 3. Різниця прогнозованих полів Δg (в мілігалах, ізоаномали проведені через 2 мГал)

- anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. *Dep. Geod. Sci. Rep.*, No 355, Ohio State Univ., Columbus, 1984.
3. Marchenko A.N. Parameterization of the Earth's Gravity Field. Point and Line Singularities. Lviv Astronomic and Geodetic Society, Lviv, 1998.
 4. Marchenko A.N., Abrikosov O.A. Covariance functions set derived from radial multipole potentials. *Gravity and Geoid*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995. P. 296-303
 5. Marchenko A.N., Abrikosov O.A. Geoid in the West Ukraine area derived by means of the non-central multipole analysis technique. *Gravity and Geoid*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995. P. 624-629.
 6. Marchenko A.N., Abrikosov O.A., Romanishin P.O. Improvement of gravimetric geoid in the Ukraine area using absolute gravity data. *Rep. Finnish Geod. Inst.*, 95:7, 1995. P.19-22.
 7. Moritz H. *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe, 1980.
 8. Rapp R.H., Nerem R. A joint GSFC/DMA project for improving the model of the Earth's gravitational field. *Gravity and Geoid*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995. P. 413-422.

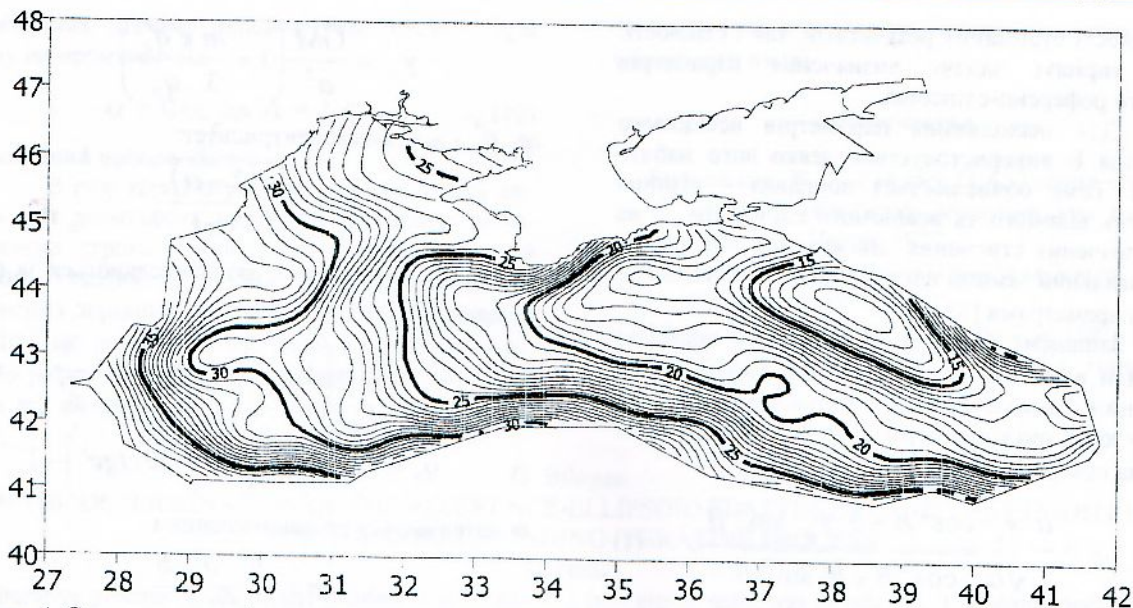


Рис. 4. Схема висот побудованого геоїда відносно еліпсоїда GRS80 (горизонталі проведені через 0.5 м)

Z. Tartachinska

CONSTRUCTION OF THE ALTIMETER-GRAVIMETRIC GEOID BY
LEAST SQUARES COLLOCATION WITH ADDITIONAL CONDITIONS

Abstract

The solution was proposed for the problem of geodetic data processing by least squares collocation with additional conditions. Corresponding expressions were derived for the disturbance potential. They may be transformed easily for any derivative of the potential. Results of numerical testing of the proposed method are discussed for the construction of altimeter-gravimetric geoid in the Black Sea area from satellite altimeter data and absolute gravity values.

З.Тартачинская

ПОСТРОЕНИЕ АЛЬТИМЕТРО-ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ГЕОИДА МЕТОДОМ СРЕДНЕЙ
КВАДРАТИЧЕСКОЙ КОЛЛОКАЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Резюме

Предложено решение задачи обработки геодезических данных с помощью метода средней квадратической коллокации с дополнительными условиями. Для возмущающего потенциала получены соотношения, доставляющие решение задачи, которые легко преобразуются для случая других трансформант потенциала. Обсуждаются результаты апробации разработанного метода при построении геоида на акватории Черного моря по данным спутниковой альтиметрии и абсолютным значениям силы тяжести.