

УДК 528.72:528.735

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ

## УРАВНИВАНИЕ В ФОТОГРАММЕТРИИ ПРИ НЕКВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

В большинстве фотограмметрических задач наиболее типично допущение о том, что для  $Y$  наблюдаемых значений их ошибки  $\varepsilon$  носят независимый характер и распределены нормально. Вместе с тем определенный интерес представляет процесс уравнивания при отказе от этого утверждения и принятии другой, альтернативной гипотезы.

Известно, что при нарушении нормального закона распределения ошибок измерений, оценки, полученные по методу наименьших квадратов (МНК), вообще говоря, смещенные. Придавая слишком большое значение далеким отклонениям от регрессионной поверхности, можно получить не лучшие оценки. Поэтому предложены такие решения, которые дают лучшие оценки, чем классический МНК [1, 3].

Воспользуемся понятием и принципом минимизации функции потерь, разработанными в регрессионном анализе, ограничиваясь линейной моделью функции регрессии

$$\underset{n,1}{Y} = \underset{n,r}{A} \underset{r,1}{X} + \underset{n,1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Если функция потерь имеет неквадратичный вид

$$\rho(\varepsilon) = |\varepsilon|^{2+d}, \quad (2)$$

где  $d$  — заданный параметр неквадратичности;

$$\varepsilon_i = y_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n), \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, r; \quad r > n,$$

то, находя условный минимум функции

$$\Phi = \sum_1^r |\varepsilon_i|^{2+d}, \quad (4)$$

получаем

$$(2+d) \sum_1^r \operatorname{sign} n(\varepsilon_i) |\varepsilon_i|^{1+d} a_{i1} = 0,$$

$$(2+d) \sum_i^r \operatorname{sign}(\varepsilon_i) |\varepsilon_i|^{1+d} a_{in} = 0. \quad (5)$$

Заменяя  $\operatorname{sign}(\varepsilon_i) |\varepsilon_i|^{1+d}$  на  $|\varepsilon_i|^d$  и учитывая (3), находим систему нормальных уравнений

$$-A'RAX + A'RY = 0, \quad (6)$$

где

$$k = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \quad s_i = |\varepsilon_i|^d. \quad (7)$$

Решение системы (6) ведем итеративно, причем в первой итерации полагаем  $d=0$ ,  $R=I$  (единичная матрица), что соответствует классическому МНК.

Другой прием преобразования (5) состоит в представлении  $|\varepsilon_i|^{1+d}$  в виде

$$|\varepsilon_i|^{1+d} = |\varepsilon_i| \cdot |\varepsilon_i|^d = |\varepsilon_i| \cdot (1 + \Delta_i), \quad (8)$$

$$\Delta_i = |\varepsilon_i|^d - 1.$$

Получение устойчивого решения требует соблюдения условия  $|\varepsilon_i| > |d|$ , которое легко достигается умножением обеих частей уравнения (1) на масштабный множитель  $10^m$ . В частном случае после этой процедуры возможно разложение в ряд для  $\Delta_i$ , так что

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{j=s} \frac{(d \ln |\varepsilon_i|)^j}{j!}. \quad (9)$$

После подстановки (8) в (5) нормальные уравнения имеют вид

$$-A'AX + A'(Y + \delta) = 0, \quad (10)$$

где

$$\delta = [\varepsilon_1 \Delta_1 \varepsilon_2 \Delta_2 \dots \varepsilon_n \Delta_n]. \quad (11)$$

Сопоставление решения (10) с классическим, полученным из МНК, показывает, что при итеративном уравнительном фотограмметрическом процессе матрица  $A'A$  не меняется, а на каждом шаге происходит уточнение столбца свободных членов на величину  $\delta$ . Если в первой итерации получено из МНК решение  $\hat{X}$ , то во второй (последующей) итерации имеем

$$\hat{X} = \hat{X} + (A'A)^{-1} A' \delta. \quad (12)$$

Что касается оценки точности уравнивания, то для функции потерь (2) асимптотическая ковариационная матрица имеет вид [1]:

$$\Sigma_{\hat{X}} = (A'A)^{-1} \frac{E\rho^2(\varepsilon)}{(E\rho(\varepsilon))^2}, \quad (13)$$

где

$$E\rho^2(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_i^n \rho_i^2(\varepsilon); \quad E\rho(\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_i^n \rho_i(\varepsilon).$$

Оценку максимального правдоподобия для дисперсии  $\sigma^2$  запишем в виде

$$s^2 = \tilde{\varepsilon}' \tilde{\varepsilon} / (n - r), \quad (14)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  получено из (1) после подстановки решения  $\tilde{X}$ .

Предложенный подход справедлив и для модели неравноточных измерений с диагональной матрицей весов  $P$ , полагая вначале  $d=0$ . Переведем вектор  $\varepsilon$  с помощью линейного неособенного преобразования в равноточные составляющие

$$V = P^{1/2}\varepsilon, \quad (15)$$

а затем выполним вычислительную процедуру аналогично (6) или (10).

Для зависимых измерений  $Z$  с ковариационной матрицей  $\sigma^2 K_Z$  и линейной моделью

$$Z = AX + \varepsilon \quad (16)$$

вначале переведем вектор  $Z$  в вектор независимых составляющих  $Y$ . Учитывая симметричность матрицы  $K_Z$ , выполним разложение ее на две треугольные матрицы, так что

$$\hat{\Sigma}_Z = K'K. \quad (17)$$

Тогда введя линейное неособенное преобразование, получаем

$$Y = (K^{-1})'Z = GZ, \quad (18)$$

а уравнение, аналогичное (1), примет вид

$$Y = A_1 X + \varepsilon_1, \quad (19)$$

где

$$A_1 = GA; \quad \varepsilon_1 = G\varepsilon. \quad (20)$$

Тогда искомое решение таково:

$$\hat{X} = (A' \hat{\Sigma}_Z^{-1} A)^{-1} A' \hat{\Sigma}_Z^{-1} Z. \quad (21)$$

При неквадратичной функции потерь по аналогии с приведенными рассуждениями получим

$$\tilde{X} = (A' \Sigma_Z^{-1} A)^{-1} (A' \Sigma_Z^{-1} Z + A' \Sigma_Z^{-1} [\varepsilon \cdot \Delta_1]),$$

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^s \frac{(d \ln |(G\varepsilon_t)|)^j}{j!}, \quad C = (A' \Sigma_Z^{-1} A)^{-1} A'. \quad (22)$$

Приближенно

$$\Sigma_{\tilde{X}} = (1 + d^2) \Sigma_X + d^2 C \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{\tilde{Z}} \Sigma_Z^{-1} C' \quad (23)$$

$$и \quad \tilde{s}^2 = \tilde{\varepsilon}' \tilde{\varepsilon} / (n - r). \quad (24)$$

Здесь  $\Sigma_X$  — ковариационная матрица для вектора решений, полученная из классического МНК.

Поскольку в основу дальнейших исследований положено моделирование фотограмметрических уравнительных работ на ЭВМ, важным аспектом являлось получение ошибок, носящих заданный (независимый или зависимый) характер с известным законом распределения, не обязательно нормальным. Предполагается, что моделирование независимых нормально распределенных ошибок с заданным стандартом  $\sigma_0$  и математическим ожиданием  $E$  (чаще всего  $E=0$ ) достигается применением таких вычислительных процедур, которые приводятся в библиотеках стандартных программ для ЭВМ. Например, для моделирования равномерно распределенных случайных чисел в интервале  $(0,1)$  разработана программа *RANDU*, а для последующего моделирования нормально распределенных независимых ошибок — программа *GAUSS*. Применение неквадратичной функции потерь вида (2) требует таких рядов смоделированных величин, которые имели бы негауссовое распределение. Интересно распределение, в котором ошибки измерений характеризуются «утяжененными» хвостами — это так называемое двойное экспоненциальное распределение (распределение Лапласа) [4]:

$$\begin{aligned} e_i &= u_i + u_{i+1}, \\ z_i &= 1 - \exp(-\lambda u_i). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь числа  $z_i$  — равномерно распределенные в интервале  $(0, 1)$ ;  $\lambda$  — заданный параметр распределения Лапласа. Тогда

$$u_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z_i). \quad (26)$$

Моделирование случайных зависимых величин выполнено на основании известного перевода вектора зависимых измерений в вектор независимых составляющих [2] при заранее сгенерированной корреляционной матрице  $R_\lambda$ :

$$R_\lambda = \lambda R. \quad (27)$$

Для получения коэффициентов матрицы  $R$  принята гипотеза о том, что коэффициент корреляции зависит от расстояния между точками  $i$  и  $j$ , так что исходная функция имеет вид

$$\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) = e^{-\lambda \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}. \quad (28)$$

Из дифференцирования (28) для пары точек составлены уравнения их частных производных:

$$\rho = \rho_0 + A\delta + \gamma. \quad (29)$$

Тогда из коэффициентов, составляющих матрицу  $A$ , можно построить ковариационную матрицу  $\Sigma$ :

$$\Sigma = A'A \quad (30)$$

и корреляционную матрицу  $R$  с элементами

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}}}, \quad (31)$$

где  $\sigma_{ij}$  — элементы матрицы  $\Sigma^{-1}$  (30).

В экспериментальной части исследований\* поставлен вопрос о выявлении условий, при которых параметр неквадратичности  $d$  функции потерь оказывает экстремальное влияние на решение задачи взаимного ориентирования. С этой целью сравнивались решения  $\hat{X}$  (классический МНК) и нетрадиционное решение  $\tilde{X}$  из (6), (10), (21), (22) в зависимости от принятой модели ошибок измеренных величин.

Для решения принято, что на стереопаре взяты точки со стандартным расположением в шести зонах, причем в каждой из них имеем  $k$  точек ( $k=1, 2, \dots, 10$ ). С учетом линеаризованного уравнения взаимного ориентирования матрица имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \frac{y \cdot b}{f} & 0 & -k \frac{y \cdot b}{f} \\ 0 & kb & 0 & k \cdot b & 0 & k \cdot b \\ 0 & 0 & k \frac{yb}{f} & 0 & -k \frac{yb}{f} & 0 \\ -kf & -kf & -k\left(f + \frac{y^2}{f}\right) & -k\left(f + \frac{y^2}{f}\right) & -k\left(f + \frac{y^2}{f}\right) & -k\left(f + \frac{y^2}{f}\right) \\ k \cdot b & 0 & k \cdot b & 0 & kb & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

Здесь  $y$  — стандартная ордината зоны;  $b$  — базис снимка ( $y = -b = 70$  мм). Фокусное расстояние  $f$  имеет значение 70 и 100 мм. Параметр неквадратичности  $d$  принят  $-1; -0,75; -0,5; -0,25; +0,25; +0,5$ . Для каждого фиксированного значения  $k$  и  $d$  получены 60 реализаций случайных ошибок поперечных параллаксов. По этим данным вычислено несовпадение решений  $\Delta X = \tilde{X} - \hat{X}$  (32) для элементов взаимного ориентирования ( $\Delta a_i, \Delta a_n, \Delta \omega, \Delta \chi_i, \Delta \chi_n$ ). По каждому элементу вычислено среднее квадратическое отклонение, например,

$$\sigma_{a,i} = \left( \frac{1}{59} \sum_{i=1}^{60} (\Delta a_{i,i} - \bar{\Delta a}_{i, \text{ср}})^2 \right)^{1/2}. \quad (33)$$

Вычисления проведены по четырем вариантам смоделированных ошибок поперечных параллаксов:

\* Программа для ЭВМ ЕС написана Г. Н. Телковой.

- ошибки имеют распределение Гаусса, матрица весов единичная;
- распределение ошибок по Гауссу, измерения неравноточные, матрица весов известна;
- распределение ошибок по Лапласу, матрица весов единичная;
- распределение ошибок по Лапласу, измерения неравноточные, матрица весов известна.

Достаточно полную картину влияния параметра неквадратичности на несовпадение решений  $\Delta X$  представляют средние значения  $\sigma_{cp}$  средних квадратических ошибок, вычисленные по каждому элементу взаимного ориентирования, представленные в таблице.

Кроме того, на рис. 1—6 показано изменение точности решения задачи взаимного ориентирования в зависимости от числа точек и параметра неквадратичности \*.

Средние значения  $\sigma_{cp}$  (в мин) средних квадратических ошибок элементов взаимного ориентирования ( $f = 70$  мм)

Вариант	Параметр неквадратичности					
	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5
Э л е м е н т $a_1$						
1	1.2	0.33	0.42	0.32	0.73	2.4
2	2.2	0.50	0.26	0.23	0.60	2.2
3	1.2	0.88	0.82	0.55	1.0	3.0
4	2.3	0.64	0.51	0.38	0.87	2.9
Э л е м е н т $a_n$						
1	1.1	0.34	0.41	0.31	0.70	2.3
2	2.1	0.47	0.27	0.23	0.61	2.1
3	1.3	0.95	0.87	0.57	1.0	3.0
4	2.2	0.72	0.56	0.40	0.85	2.7
Э л е м е н т $\omega$						
1	1.5	0.42	0.50	0.38	0.86	2.8
2	3.0	0.69	0.28	0.25	0.70	2.6
3	1.4	1.00	0.94	0.62	1.1	3.3
4	2.9	0.77	0.54	0.41	0.97	3.3
Э л е м е н т $x_d$						
1	2.6	0.75	0.88	0.77	1.5	5.0
2	5.4	1.2	0.47	0.43	1.2	4.5
3	2.5	1.8	1.7	1.1	2.1	6.0
4	5.3	1.3	0.89	0.70	1.7	5.8
Э л е м е н т $x_n$						
1	2.5	0.77	0.86	0.65	1.5	4.7
2	5.4	1.3	0.44	0.40	1.2	4.3
3	2.6	1.9	1.7	1.1	2.0	5.9
4	5.3	1.4	0.99	0.75	1.8	5.9

\* Условные обозначения на рис. 2—6 те же, что и на рис. 1.

Сопоставление этих данных показывает, что при заданном параметре  $d$  точность решения задачи стабилизируется при числе точек 24 и более. Учет весов параллаксов (варианты 2 и 4) приводит к уменьшению несовпадения решений в полтора—два раза при  $d = -0,5; -0,25$ . При  $d = -1, -0,75$  неучет весов приводит к тому, что ошибки определяемых элементов

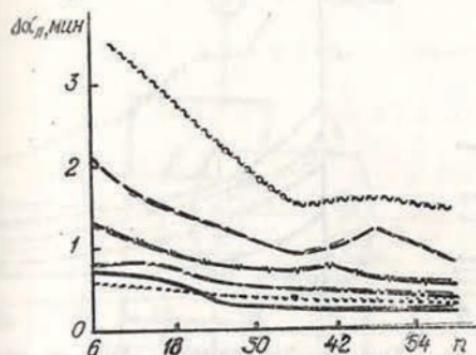


Рис. 1. Зависимость  $\Delta\alpha_0$  от числа точек,  $P=1$ , распределение по Гауссу:  
 $\sim \sim \sim d=0,5$ ;  $- - - d=-1$ ;  
 $- \vee - d=0,25$ ;  $- \cdot - d=-0,5$ ;  
 $\cdots \cdots d=-0,75$ ;  $- - d=-0,25$ .

взаимного ориентирования во втором варианте большие, чем в первом. Аналогичная картина наблюдалась для ошибок, распределенных по Лапласу.

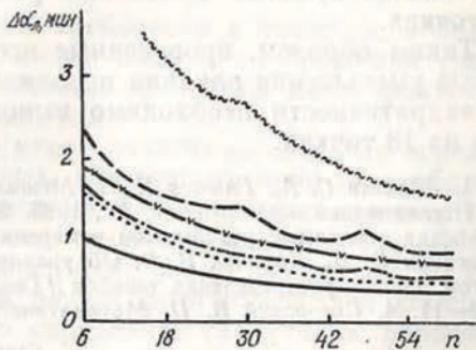


Рис. 2. Зависимость  $\Delta\alpha^4$  от числа точек,  $P=1$ , распределение ошибок по Лапласу.

Анализ показывает, что изменение параметра  $d$  в интервале  $-0,25$  до  $-0,75$  не приводит к существенному изменению решения задачи при равноточных измерениях. Правильный учет

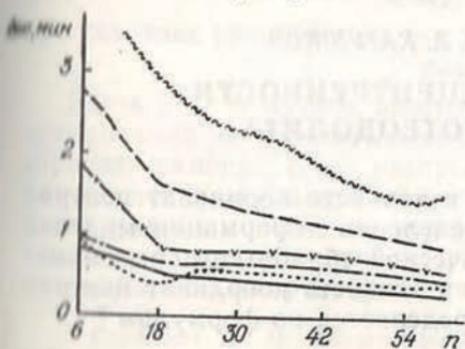


Рис. 3. Зависимость  $\Delta\omega$  от числа точек,  $P=1$ , распределение по Гауссу.

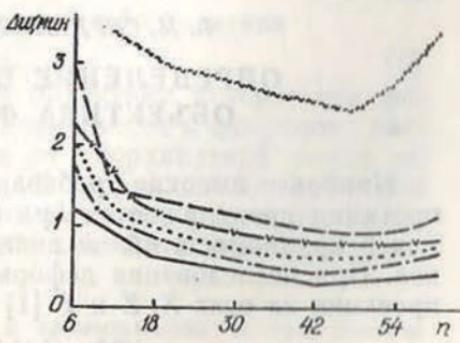


Рис. 4. Зависимость  $\Delta\omega$  от числа точек,  $P=1$ , распределение по Лапласу.

весов изменяет решение примерно в два раза как для ошибок, распределенных по Гауссу, так и по Лапласу. При  $d=-1$  несовпадение результатов существенно и при учете весов параллаксов. Стабилизация решений для гауссова распределения ошибок происходит в интервале от 18 до 30 точек, причем рез-

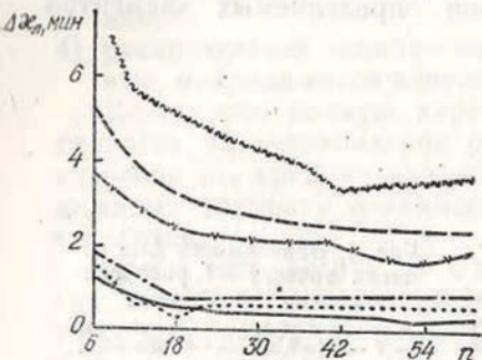


Рис. 5. Зависимость  $\Delta x_n$  от числа точек,  $P=1$ , распределение ошибок по Гауссу.

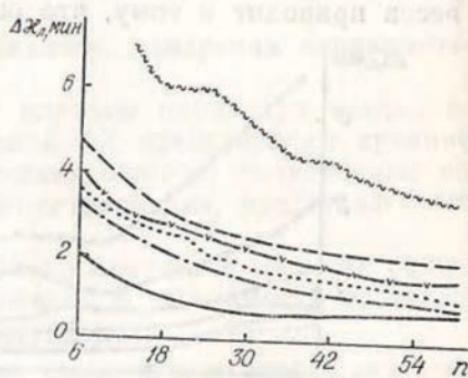


Рис. 6. Зависимость  $\Delta x_n$  от числа точек,  $P=1$ , распределение ошибок по Лапласу.

кие скачкообразные изменения решений происходят при 6—12 точках.

Таким образом, проведенные исследования показали, что с целью уменьшения влияния неправильно выбранного параметра неквадратичности необходимо выполнять измерения не менее чем на 18 точках.

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М., 1985. 2. Кемниц Ю. В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. М., 1970. 3. Мещеряков Г. А., Волжанин С. Д., Киричук В. В. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок // Геодезия и картография. 1984. № 2. С. 9—11. 4. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. К., 1975.