

## ОПЫТ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В [2] теоретически обоснована целесообразность развития сетей пространственной трилатерации для изучения деформаций земной поверхности на геодинамических полигонах. Преимущества метода построения геодезических сетей перед традиционными несомненны, поскольку определяется одновременно три координаты пунктов, или три составляющие движения точек земной поверхности в пространстве; все измерения, проводимые в сети, однородны, так как выполняются одним видом измерительных приборов, а именно электронно-оптическими светодальномерами, и, как следствие, однородны ошибки измерительной информации; отсутствуют проблемы редукции при уравнивании подобных сетей, так как последнее выполняется в трехмерном пространстве с произвольным выбором системы координат.

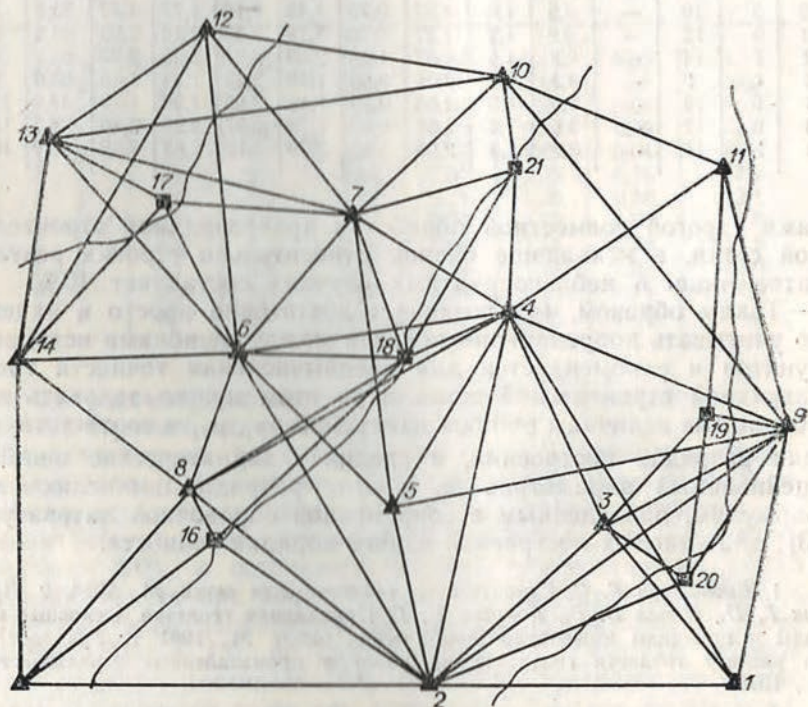


Схема модельной сети пространственной трилатерации:

▲ — пункты первого варианта сети; ■ — пункты, включенные во второй вариант сети.

В настоящей статье предпринята попытка модельных исследований точностных характеристик некоторых конкретных пространственных трилатераций.

Для построения модельной сети пространственной трилатерации на карте масштаба 1:50000 запроектировано два варианта сетей, состоящих из 15 и 21 пунктов соответственно (см. рисунок). Причем второй вариант сети предусматривает лишь добавление еще шести пунктов в ее первоначальный вариант

Таблица 1

«Истинные» координаты пунктов

Номер пунктов	$X_m$ , м	$Y_m$ , м	$H_K$ , м	$Z_m$ , м
1	-13035,0	-2105,0	2036,6	746,6
2	-13740,0	-10280,0	2725,5	1426,5
3	-9085,0	-5920,0	1972,8	673,8
4	-3500,0	-8945,0	2000,8	701,8
5	-9175,0	-11650,0	1789,7	490,7
6	-5255,0	-15975,0	2001,0	702,0
7	-1345,0	-13190,0	1505,1	206,1
8	-8995,0	-16925,0	2130,1	831,1
9	-6150,0	-1395,0	1761,2	462,2
10	2635,0	-9700,0	1622,2	323,2
11	670,0	-3600,0	1317,7	18,7
12	3510,0	-17600,0	1359,1	60,1
13	245,0	-21380,0	1395,1	96,1
14	-6790,0	-21745,0	2079,5	780,0
15	-14390,0	-21050,0	2055,8	756,8
16	-10325,0	-16200,0	1600,0	301,0
17	-1110,0	-18275,0	1388,0	89,0
18	-5125,0	-11450,0	1430,0	131,0
19	-5535,0	-3500,0	1430,0	131,0
20	-10450,0	-3925,0	1607,0	308,0
21	325,0	-9125,0	1345,0	46,0

(по аналогии со сгущением плановых сетей). Затем установлена местная система координат с началом в некоторой точке, имеющей минимальную отметку, причем оси  $X$  и  $Y$  расположены параллельно координатной сетке карты. В этой системе координат получаем с точностью до пяти метров плановые и по 0,1 м высотные, так называемые «истинные» координаты пунктов. Причем координату  $Z$  находим как разность отметки пункта и точки, служащей началом системы координат (табл. 1). По этим координатам вычисляем «истинные» длины наклонных дальностей запроектированной сети, характеризуемые диапазоном 5... 12 км, в которые затем вводятся ошибки измерений с помощью датчика случайных чисел из нормальной совокупности  $N(0, \sigma)$ , где

$$\sigma = 4 \text{ мм} + D \cdot 10^{-6} \text{ м} \quad (1)$$

переменное среднее квадратическое отклонение, характеризующее точность измерения линий светодальномером СГ-3. Далее,

для первого варианта сети по методике, подробно описанной в [1, 2, 6], выбираем прямоугольную пространственную локальную систему координат  $X, Y, Z$  с началом  $O$  в точке  $I$  и закрепляем ее пунктами 2 и 3, направив ось  $OX$  в направлении пункта 2. Приближенные координаты остальных пунктов сети вычисляем по формулам пространственной линейной засечки [3]. Возникающую при вычислении координат определяемого пункта двузначность решения легко устранить путем сравнения каждой из двух длин линий, полученных по каждой тройке координат с грубо приближенным значением линий, соединяющих начало локальной системы координат (п. 1) с определяемым пунктом. Это расстояние приближенно можно получить по координатам, снятым непосредственно с карты.

Таким образом, для однозначного определения координат всех пунктов сети достаточно измерить 39 линий, в соответствии с формулой числа необходимых измерений в пространственных линейных сетях:

$$P = 3N - G, \quad (2)$$

где  $N$  — число пунктов сети.

При наличии избыточных измерений в такой сети возникает задача уравнивания результатов измерений, которую, как показали исследования, целесообразно решать параметрическим способом. Алгоритм уравнивания сети пространственной трилатерации, а также формулы оценки точности, приведены в [2].

Важный момент настоящих исследований — определение начала локальной системы координат и выбор ходовой линии, по которой вычисляем приближенные значения координат пунктов. Очевидно, что и то, и другое не является однозначным, причем, если первое зависит от числа пунктов сети, то второе — от числа избыточных в ней измерений. В нашем случае мы выбираем следующую ходовую линию для первого варианта сети:

$$(1-2-3)_4 \rightarrow (2-3-4)_5 \rightarrow (2-4-5)_6 \rightarrow (4-5-6)_7 \rightarrow \\ \rightarrow (2-4-6)_8 \rightarrow (3-4-5)_9 \rightarrow (4-7-9)_{10} \rightarrow (4-9-10)_{11} \rightarrow \\ \rightarrow (6-7-10)_{12} \rightarrow (6-7-12)_{13} \rightarrow (6-8-13)_{14} \rightarrow (2-8-14)_{15} \quad (3)$$

Каждая такая четверка пунктов определяет пространственное построение в виде тетраэдра. Вполне очевидно, что геометрия такого тетраэдра, а именно, отношение соответствующих его элементов определяет ошибку положения каждого четвертого пункта относительно трех исходных, или базисных. Согласно [3], составляющая ошибки положения, параллельная плоскости базисного треугольника, или ошибка планового положения, описывается соотношением

$$M_x^2 = \left(\frac{S_1}{h_a}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{S_2}{h_b}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{S_3}{h_c}\right)^2 m_3^2, \quad (4)$$

а составляющая ошибки перпендикулярной к плоскости  $\pi$ , или ошибка высоты, —

$$M_h^2 = \left( \frac{S_1 \lambda_2}{\nu c} \right)^2 m_1^2 + \left( \frac{S_2 \lambda_3}{\nu a} \right)^2 m_2^2 + \left( \frac{S_3 \lambda_1}{\nu b} \right)^2 m_3^2, \quad (5)$$

где  $S_1, S_2, S_3$  — длины линий засечки;  $h$  — высоты базисного треугольника;  $\nu$  — высота тетраэдра;  $m_i$  — средние квадратические ошибки измеряемых линий.

В [4, 5] теоретически оценивается точность линейной засечки на плоскости по трем исходным пунктам. Опираясь на эти исследования, можно для любой заданной формы базисного треугольника выбрать такую область допустимых положений определяемого пункта, что ошибка определения координат последнего не превышает наперед заданную.

Отсюда понятно стремление улучшить геометрию отдельных построений путем сгущения первоначального варианта сети добавлением нескольких пунктов (в нашем случае — шести) и располагая их в долинных участках района. Предполагается, что таким образом можно несколько повысить точность координат отдельных пунктов сети, определяя их по вновь запроектированным.

Оставляя неизменной выбранную локальную систему координат, для второго варианта сети координаты пунктов вычисляем по следующей ходовой линии:

$$\begin{aligned} (1-2-3)_9 \rightarrow (2-9-3)_{20} \rightarrow (9-20-3)_{19} \rightarrow (2-3-9)_5 \rightarrow (2-3-5)_4 \rightarrow \\ \rightarrow (2-4-5)_6 \rightarrow (4-5-6)_7 \rightarrow (4-6-7)_{18} \rightarrow (4-7-18)_{21} \rightarrow \\ \rightarrow (7-4-21)_{10} \rightarrow (4-10-19)_{11} \rightarrow (5-6-18)_8 \rightarrow (2-8-18)_{16} \rightarrow \\ \rightarrow (2-8-16)_{15} \rightarrow (4-6-7)_{17} \rightarrow (6-7-17)_{13} \rightarrow (8-13-17)_{14} \rightarrow \\ \rightarrow (6-7-13)_{12}. \end{aligned}$$

Сравнивая оба варианта ходовой линии, отмечаем, что в основном все определяемые пункты (кроме 6 и 7) во втором варианте сети получены по новым исходным тройкам пунктов. Интуитивный выбор пунктов, образующих основание тетраэдра того или иного звена ходовой линии, как оказалось, не всегда наилучший.

В табл. 2 приведены составляющие и полная ошибки положения пунктов относительно базисной плоскости тетраэдров, образующих ходовые линии (6) и (3).

Не останавливаясь на анализе плановых составляющих ошибок, полученных с достаточно хорошей точностью, тем более, что мы пока не ставим себе целью достижения оптимальной точности, перейдем непосредственно к рассмотрению ошибок высоты, оказывающих основное влияние на определение положения точки в пространстве вследствие всех величин. Как уже было сказано ранее, ошибка высоты  $M_h$ , вычисляемая по формуле (5), изменяется в зависимости от отношения  $S$  к  $\nu$ , или иначе, от углов засечки, под которыми искомый пункт виден из исходных. Так для пункта 11 из первого варианта сети, 14 и 17 из

второго углы засечки составляют менее 1°. Для пунктов, ошибка высоты которых получена с точностью до 0,1 м, углы засечки в зависимости, также, от формы базисного треугольника находятся в пределах от 8 до 35°.

Сгущение сети в целом улучшает точность определения положения пунктов, полученных путем пространственной засечки, за исключением пунктов 5 и 14. Однако их начальные, приближенные координаты можно вычислить по исходным тройкам пунктов, выбранным в первом варианте.

Таблица 2  
Ошибки положения пунктов относительно базисной плоскости отдельных тетраэдров

Номер пунктов	I вариант сети			II вариант сети		
	$M_K$ , м	$M_Y$ , м	$M_P$ , м	$M_K$ , м	$M_Y$ , м	$M_P$ , м
1	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—
4	—	—	—	0,0373	0,170	0,174
5	0,0197	0,0760	0,0785	0,140	0,967	0,978
6	0,0548	0,156	0,165	0,0549	0,156	0,165
7	0,0222	0,124	0,125	0,0222	0,124	0,126
8	0,0225	0,578	0,578	0,0267	0,327	0,328
9	0,0366	0,452	0,454	—	—	—
10	0,180	0,180	0,255	0,0214	0,0678	0,0711
11	0,0259	1,180	1,180	0,0290	0,369	0,370
12	0,253	0,221	0,336	0,0307	0,336	0,338
13	0,0361	0,363	0,365	0,0331	0,292	0,294
14	0,0306	0,362	0,363	0,0431	3,939	3,939
15	0,172	0,486	0,515	0,105	0,100	0,145
16	—	—	—	0,0156	0,0248	0,0293
17	—	—	—	0,0326	1,232	1,232
18	—	—	—	0,0142	0,0387	0,0412
19	—	—	—	0,0247	0,0721	0,0762
20	—	—	—	0,0639	0,126	0,141
21	—	—	—	0,0263	0,0918	0,0954

Очевидно, что геометрия всей сети в целом обусловлена как необходимыми, так и избыточными измерениями, выполненными в ней. Кроме того, количество избыточных измерений определяет число вариантов выбора ходовой линии или вычисления начальных координат пунктов сети. Отсюда понятно стремление выбора оптимальной ходовой линии из имеющегося набора измеренных дальностей для получения наиболее точных значений приближенных координат. Такой выбор возможен из анализа пространственных построений (тетраэдров), а именно, по формулам (4) и (5). В свою очередь, оптимально выбранное начальное приближение координат пунктов позволяет получить минимальное число итераций в процессе уравнивания сети.

Перейдем теперь к анализу оценки точности положения пунктов сети в целом относительно выбранной нами локальной си-

стемы координат, т. е. полученной непосредственно из уравнивания всех длин наклонных дальностей (табл. 3).

Как видно из табл. 3, максимальные значения имеют ошибки координаты  $Z$ . Объясняется это тем, что пункты сети являются как бы «стелющимися» по отношению к базисной координатной плоскости из-за малого угла наклона между ней и средней плоскостью системы определяемых пунктов. Изменение же угла наклона базисной плоскости приводит лишь к перераспределению плановых и высотных составляющих ошибок,

Таблица 3

**Ошибки положения пунктов, полученные из совместного уравнивания всей сети**

Номер пунктов	I вариант сети			II вариант сети		
	$M_L, м$	$M_Z, м$	$M_P, м$	$M_L, м$	$M_Z, м$	$M_P, м$
1	—	—	—	—	—	—
2	0,0093	—	0,0093	0,0112	—	0,0112
3	0,0125	—	0,0125	0,0153	—	0,0153
4	0,0270	0,531	0,532	0,0327	0,590	0,591
5	0,0508	0,338	0,339	0,0522	0,356	0,360
6	0,0374	0,805	0,806	0,0390	0,836	0,837
7	0,0424	0,886	0,888	0,0445	0,956	0,957
8	0,0508	0,644	0,645	0,0516	0,652	0,654
9	0,0368	0,422	0,423	0,0261	0,199	0,201
10	0,0533	1,058	1,059	0,0490	1,059	1,060
11	0,0392	2,008	2,009	0,0333	0,419	0,420
12	0,0662	1,412	1,414	0,0714	1,561	1,563
13	0,0919	1,432	1,440	0,0952	1,552	1,555
14	0,0796	1,192	1,196	0,0724	1,094	1,096
15	0,1810	1,114	1,128	0,1164	0,597	0,608
16				0,0997	0,532	0,541
17				0,0833	1,274	1,278
18				0,0599	0,606	0,610
19				0,0264	0,169	0,171
20				0,0156	0,0498	0,0522
21				0,0360	0,870	0,871

оставляя полную ошибку неизменной. В нашем случае полная ошибка положения пунктов практически определяется ошибкой по оси  $Z$ , которая для целого ряда пунктов оказалась более одного метра. Сгущение сети «долинными» пунктами даже при увеличении числа избыточных измерений не приводит к ожидаемому результату, т. е. существенному повышению точности. И хотя в целом по сети полные ошибки положения пунктов уменьшились, однако точность определения координат отдельных пунктов, а именно 10, 12, 13, 14, остается довольно низкой. Объяснить такой результат можно следующим образом. Во-первых, из-за малых превышений между пунктами, добавление «долинных» пунктов незначительно улучшает геометрию построения. Кроме того, мы получаем совершенно новую сеть, в которой уже не 15, а 21 пункт. И, во-вторых, расположенные

в основном в центральной части сети новые пункты мало связаны непосредственно измерениями с наиболее «слабыми» пунктами, находящимися преимущественно по краям сети.

Пренебрегая отсутствием видимости между смежными пунктами для данной местности, мы запроектировали еще одну сеть, состоящую, как и первая, из 15 пунктов и включающая в себя как «вершинные» пункты из первого варианта, так и «долинные» из второго. Оставив неизменным положение базисной плоскости, из уравнивания этой сети мы получили уже полные ошибки определения координат пунктов, не превышающие 0,7 м. Таким образом, точность определения пространственных координат пунктов, полученных методом пространственной трилатерации, зависит лишь от перепада высот и от наличия взаимной видимости между смежными пунктами сети.

Кроме того, мы выполнили аналогичные вычисления для случаев, когда базисная плоскость выбирается в центре рассматриваемой сети.

Анализируя проведенные вычисления, можно сделать следующие выводы по проектированию и уравниванию пространственных трилатерационных сетей:

1) проектирование пространственных сетей целесообразно осуществлять путем оценки точности элементарных построений, составляющих настоящую сеть, в виде тетраэдров;

2) полученные оптимальные, наилучшие с точки зрения геометрии, пространственные построения образуются из необходимых измерений и составляют ходовую линию, по которой вычисляются приближенные координаты пунктов сети с наибольшей возможной точностью;

3) на ошибки определения пространственных координат пунктов сети влияют как количество избыточных в ней измерений, так и место расположения базисной координатной плоскости. А именно, ошибки возрастают по мере удаления пунктов от базисной плоскости. Выбор последней в центре сети показал уменьшение ошибок, при неизменном количестве избыточных измерений, в 2—2,5 раза;

4) введение нового набора ошибок в «истинные» длины линий практически не меняет ошибки определения координат пунктов, изменяя сами значения уравненных координат в пределах точности их определения;

5) отметим также, что повышение точности пространственных построений прямо пропорционально повышению точности измерения дальностей применяемыми светодальномерами.

В заключение отметим некоторые области применения развития пространственной трилатерации. Это, во-первых, развитие опорных сетей в горных и высокогорных районах. Во-вторых, создание пространственных сетей для одновременного получения всех трех составляющих векторов движения точек земной поверхности на геодезических полигонах. В-третьих, создание сетей пространственной микротрилатерации для изучения деформаций как на крупных инженерных сооружениях, так и

взамен сетей микротриангуляций, на активных геологогеоморфологических образованиях: «постройки» вулканов и тектонические разломы в горной местности. И, в-четвертых, для наблюдения за деформациями бортов карьеров.

Учитывая все вышесказанное, а также не оставляя без внимания появления в последнее время все более высокоточной дальномерной измерительной аппаратуры, перспективы ее развития, мы надеемся, что создание геодезических сетей методами пространственной трилатерации будет иметь в будущем большое значение при решении целого ряда геодезических задач.

1. *Иордан В., Эггерт О., Кнейсель М.* Руководство по геодезии. М., 1971. Т. 6.
2. *Киричук В. В., Глаголев М. Л.* О возможности применения пространственной трилатерации для изучения деформаций земной поверхности // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1989. Вып. 49. С. 39—47.
3. *Ковалив И. И., Савяк З. Р.* Точность пространственной линейной засечки по четырем исходным пунктам // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 47. С. 23—29.
4. *Колесник Н. А., Островский А. П., Скуин Б. П.* Уравнивание свободных линейных сетей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1979. Вып. 29. С. 20—24.
5. *Савяк З. Р., Ковалив И. И.* Точность линейной засечки по трем исходным пунктам и точка Лемуана // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 82—86.
6. *Escobal P. R.* Multibaseline: A precision ground geodetic measurement technique // J. Astronaut. Sci 1978. V. 26. P. 235—256.