

меньшей стороны искомого угла β . Особенно наглядно эта закономерность просматривается на графике (рис. 3), построенном по средним значениям погрешностей \bar{m}_β (см. табл. 1), характеризующим точность определения горизонтальных углов по плану способом координат в зависимости от длин образующих эти углы сторон.

Зависимость средней квадратической погрешности \bar{m}_β' от определяемого угла в обобщенном виде (т. е. независимо от длин образующих угол сторон, см. табл. 1) графически представлена на рис. 4. Как видим, значения \bar{m}_β' с увеличением угла на $15\dots 30^\circ$ возрастают примерно на $5\dots 7\%$, но между крайними значениями (от 15° до 180°) изменение \bar{m}_β' достигает существенной величины — около 70%.

В целом при малых длинах сторон ($s \leq 20$ мм) способ координат дает довольно низкую точность определения горизонтального угла — примерно от $15'$ до $1,5^\circ$; при длинах сторон от 25 до 40 мм точность повышается и практически не выходит за пределы $15'$; при сторонах $s \geq 50$ мм средняя квадратическая ошибка определения угла менее $10'$ (см. табл. 1 и 2).

Очевидно, обнаруженные закономерности позволяют более обоснованно подойти к выбору рациональной методики подготовки разбивочных данных для выноса с нужной точностью проекта инженерного сооружения в натуре.

1. Большаков В. Д., Маркузе Ю. И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М., 1984.
2. Левчук Г. П., Новак В. Е., Конусов В. Г. Прикладная геодезия: Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. М., 1981.
3. Маслов А. В., Горюхов Г. И. Геодезические работы при землеустройстве. М., 1976.

Статья поступила в редакцию 30.01.90

УДК 528.5

Р. Н. ГАЙНУЛИН

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ПО ИЗМЕРЕННЫМ НА ПЛАНЕ СТОРОНАМ

Горизонтальные углы относятся к основным разбивочным элементам, необходимым для выноса характерных точек запроектированного инженерного сооружения в натуре.

Одним из возможных способов определения горизонтальных углов по топографическому плану является способ измерения сторон с дальнейшим вычислением по теореме косинусов или синусов.

© Гайнуллин Р. Н., 1992

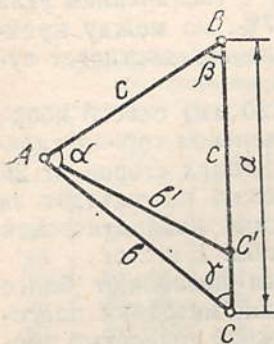
Допустим, что на плане имеются три точки A , B и C , образующие треугольник со сторонами a , b и c с углами соответственно α , β и γ (см. рисунок).

Согласно теореме косинусов [3],

$$\cos \beta = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac. \quad (1)$$

Отсюда

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \quad (2)$$



Определение угла по измеренным на плане сторонам.

Частные производные от этой функции по соответствующим аргументам будут

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} = (c^2 - a^2 - b^2) / 2a^2 c \sin \beta; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial b} = b/a c \sin \beta; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial c} = (b^2 + c^2 - a^2) / 2ac^2 \sin \beta. \quad (5)$$

С учетом этих значений частных производных, полагая, что стороны a , b и c измеряются по плану независимо друг от друга, для средней квадратической погрешности определения угла по правилам теории ошибок измерений [1] получим

$$\frac{m_{\beta}^2}{p^2} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^4 c^2 \sin^2 \beta} m_a^2 + \frac{b^2}{a^2 c^2 \sin^2 \beta} m_b^2 + \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2}{4a^2 c^4 \sin^2 \beta} m_c^2. \quad (6)$$

Здесь m_a , m_b и m_c — средние квадратические ошибки измерения сторон соответственно a , b и c .

Другая возможность определения горизонтальных углов по измеренным на плане сторонам — использование теоремы синусов, в соответствии с которой [3]

$$\beta = \arcsin \frac{b}{2R}, \quad (7)$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC ;

$$R = abc / 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad (8)$$

$p = 0.5(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

На основе формул (7) и (8) после несложных преобразований можно получить

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^2}{2c^2} - \frac{a^2}{4c^2} - \frac{b^4}{4a^2 c^2} - \frac{c^2}{4a^2} + 0.5}. \quad (9)$$

Для этой функции частные производные по соответствующим аргументам имеют вид

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} = \frac{(b^2 - c^2)^2 - a^4}{4a^3 c^2 \sin \beta \cos \beta}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial b} = b(a^2 + c^2 - b^2)/2a^2 c^2 \sin \beta \cos \beta; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial c} = \frac{(a^2 - b^2) - c^4}{4a^2 c^3 \sin \beta \cos \beta}. \quad (12)$$

Легко убедиться, что с учетом (1) после несложных алгебраических преобразований зависимости (10), (11) и (12) превращаются соответственно в выражения (3), (4) и (5).

Таким образом, точность определения горизонтальных углов по измеренным на плане сторонам не зависит от того, какой теоремой для этого воспользоваться — теоремой синусов или косинусов. Однако при практических расчетах предпочтение следует отдавать формуле (2), вытекающей из теоремы косинусов, как более простой и удобной по сравнению с формулой (9).

Учитывая, что при измерении по плану расстояний $m_a = m_b = m_c = m_s$, формуле (6) можно придать вид

$$m_\beta = \frac{\rho m_s}{2a^2 c^2 \sin \beta} \sqrt{a^2(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2}. \quad (13)$$

Результаты расчетов по формуле (13) для разных длин сторон a и c и углов β , полагая $m_s = 0,08$ мм [2], сведены нами в табл. 1. При этом сторону b вычисляли по теореме косинусов, а для общности выводов вычисления выполняли при разных соотношениях между сторонами c и a , образующими определяемый угол β .

Из полученных данных следует, что точность определения горизонтальных углов по измеренным на плане сторонам существенно зависит от длины образующих угол сторон и самих углов. Наиболее точно определяются углы около $45\dots 75^\circ$, но при значениях углов выше 90° погрешности резко возрастают; погрешности также возрастают с увеличением неравенства длин сторон, образующих определяемый угол.

Вместе с тем обнаруживается и такая интересная закономерность: если стороны определяемого угла одинаковы ($c=a$), то точность определения таких углов в некоторых случаях выше точности определения таких же по величине углов, но с разными длинами сторон (например, $a>c$).

Чтобы более точно выявить эту закономерность, рассчитаем средние квадратические погрешности определения углов β для случая, когда $c=a=s$. Сторона b в этом случае превращается в сторону b' (см. рисунок), равную $2s \sin \frac{\beta}{2}$, а формула (13) принимает вид

$$m_{\beta} = \frac{\rho m_s}{s} \sqrt{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \quad (14)$$

Результаты расчетов по формуле (14) сведены в табл. 2. Из полученных данных следует, что при равенстве сторон, образующих угол β , наиболее точно определяются острые углы, причем погрешности уменьшаются по мере возрастания длин сторон.

Таблица 1

Средние квадратические погрешности определения углов по измеренным на плане сторонам при разных длинах сторон, образующих угол

$c, \text{мм}$	$a, \text{мм}$	$\beta : 15^\circ$	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
5	5	56'	61'	68'	78'	91'	110'	136'	174'	236'	360'
	10	186	101	78	73	77	87	104	132	178	270
	15	245	127	91	78	77	82	96	119	159	241
	20	274	140	98	81	77	80	92	113	150	226
	25	292	148	103	84	77	79	89	109	145	217
	30	304'	155'	106'	86'	78'	79'	88'	107'	141'	211'
10	10	28'	30'	34'	39'	46'	55'	68'	87'	118'	180'
	15	65	39'	34	36	40	47	57	73	99	150'
	20	93	50	39	36	38	43	52	66	89	135
	25	111	58	43	38	38	42	49	62	83	126
	30	122	63	45	39	38	41	48	59	80	120
	35	131'	67'	48'	40'	38'	40'	47'	58'	77'	116'
15	15	19'	20'	23'	26'	31'	37'	45'	58'	79'	120'
	20	34	23	22	24	27	32	40	51	69	105
	25	56	29	24	24	26	30	37	47	63	96
	30	62	34	26	24	26	29	35	44	59	90
	35	70'	37'	28'	25'	25'	28'	33'	42'	57'	86'
20	20	14'	15'	17'	20'	23'	28'	34'	44'	59'	90'
	25	22	16	16	18	21	25	31	39	53	81
	30	32	20	17	18	20	23	29	36	49	75
	35	40	23	18	18	19	22	27	34	47	71
	40	47'	25'	19'	18'	19'	22'	26'	33'	45'	68'

Если сравнить эти результаты с данными табл. 1, то легко обнаружить, что при значениях $\beta \leq 45^\circ$ углы с равными сторонами определяются по измеренным на плане сторонам точнее, чем углы с разными длинами сторон (даже если сторона $a > c$).

Очевидно, на большей стороне, образующей угол β , например a (см. рисунок), всегда можно отложить меньшую сторону, например c . Одновременно можно измерить и отрезок $b' = AC'$. Поэтому в тех случаях, когда определяемый угол β меньше 45° , следует использовать именно эту методику определения горизонтальных углов по топографическому плану как обеспечивающую наиболее высокую точность.

В целом обнаруженные нами закономерности целесообразно учитывать при графическом и графоаналитическом способах подготовки разбивочных данных для перенесения проектов инженерных сооружений в натуре.

Таблица 2

Средние квадратические погрешности определения углов по измеренным на плане сторонам при одинаковых длинах сторон, образующих угол

<i>s</i> , мм	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
5	56'	61'	68'	78'	91'	110'	136'	174'	236'	360'
10	28	30	34	39	46	55	68	87	118	180
15	19	20	23	28	31	37	45	58	79	120
20	14	15	18	20	23	28	34	44	59	90
25	11	12	14	16	18	22	27	35	47	72
30	9,4	10,1	11,2	13,1	15,4	18,6	22,6	29,0	39,4	60,0
35	8,1	8,7	9,7	11,1	13,1	15,7	19,4	24,9	33,8	51,4
40	7,0	7,5	8,5	9,9	11,5	13,8	17,0	21,8	29,6	45,0
45	6,3	6,7	7,5	8,6	10,2	12,2	15,1	19,3	26,3	40,0
50	5,6	6,1	6,7	7,8	9,1	10,9	13,6	17,4	23,7	36,0
60	4,8	5,1	5,6	6,6	7,7	9,3	11,2	14,4	19,7	30,1
70	4,0	4,3	4,8	5,6	6,6	8,0	9,8	12,5	17,0	25,8
80	3,5	3,7	4,2	5,0	5,8	6,9	8,5	10,9	14,7	22,4
90	3,2	3,4	3,7	4,3	5,1	6,2	7,5	9,6	13,1	20,0
100	2,9	3,0	3,4	4,0	4,6	5,4	6,7	8,6	11,8	17,9
110	2,6	2,7	3,0	3,5	4,2	5,1	6,2	7,8	10,7	16,3
120	2,4'	2,6'	2,9'	3,4'	3,8'	4,6'	5,6'	7,2'	9,9'	15,0'

1. Большаков В. Д., Гайдеев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. М., 1977. 2. Маслов А. В., Александров Н. Н. О графической точности определения длин линий и положения точек на плане // Тр. МИИЗ. 1957. Вып. 2. С. 65—72. 3. Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. М., 1985.

Статья поступила в редакцию 30.01.90

УДК 528.35

Б. О. ГРИНЧИШИН, Я. М. КОСТЕЦКАЯ

О ДОПУСТИМЫХ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНАХ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Наиболее надежно качество полевых измерений контролируют по значениям свободных членов условных уравнений. Очень легко осуществлять таким путем контроль измеренных углов в сетях триангуляции, что является одним из достоинств этого метода. В сетях трилатерации такой способ контроля сложнее.

© Гринчишин Б. О., Костецкая Я. М.; 1992