УДК 528.11

А. А. РЕМИНСКИЙ

УРАВНИВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ В СОБСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА «ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34»

Пусть для определения положения точки выполнено $n>2$ измерений и в результате предварительных вычислений установлены приближенные ее координаты $\bar{x}^\circ(x^\circ, y^\circ)$. Каждому результату измерения в окрестности определяемой точки $\bar{x}^\circ$ соответствует линия положения [1], которую в нормальной форме можно представить следующим образом:

$$\delta x \cos\varphi_i + \delta y \sin\varphi_i - q_i = 0, \tag{1}$$

где δx, δy — искомые поправки к вектору приближенных координат $\bar{x}^\circ$; φ_i — направление градиента линии положения; q_i — удаление линии положения от начала координат.

Удаление находим через координаты твердой точки $\bar{x}^{\text{т}}(x^{\text{т}}, y^{\text{т}})$, относительно которой определяем линию положения данного вида измерения L, функция которого $\psi_i(L)$ входит в формулу

$$q_i = x^{\text{т}} \cos\varphi_i + y^{\text{т}} \sin\varphi_i + \psi_i(L),$$

где $\psi_i(L)$ для направления равна нулю $(\psi(\alpha)=0)$, для расстояния — горизонтальному проложению $(\psi(s)=s)$, для угла, измеренного на определяемой точке, — отрицательному значению радиуса дуги, в которую вписан угол $(\psi(\beta)=-R)$.

Чтобы не иметь дела с большими числами, вычисляем удаление от точки с приближенными координатами $\bar{x}^\circ$:

$$q_i = (x_i^{\text{т}} - x^\circ)\cos\varphi_i + (y_i^{\text{т}} - y^\circ)\sin\varphi_i + \psi_i(L). \tag{2}$$

Если из множества уравнений (1) составить систему, то в матричной форме она имеет вид

$$PA\delta\bar{x} - P\bar{q} = 0,$$

где P — диагональная матрица весов;

$$\underset{n,2}{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ \cdots & \cdots \\ \cos\varphi_n & \sin\varphi_n \end{pmatrix}; \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует система нормальных уравнений с компонентами:

$$\underset{2,2}{N} = A^{\text{т}} PA = \begin{pmatrix} \Sigma p_i \cos^2\varphi_i & \Sigma p_i \cos\varphi_i \sin\varphi_i \\ \Sigma p_i \sin\varphi_i \cos\varphi_i & \Sigma p_i \sin^2\varphi_i \end{pmatrix};$$

$$\bar{f} = A^{\mathrm{T}} P \bar{q} = \begin{pmatrix} \Sigma p_i q_i \cos \varphi_i \\ \Sigma p_i q_i \sin \varphi_i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Чтобы недиагональные элементы матрицы N сделать равными нулю, повернем систему координат по часовой стрелке на такой угол u, что новые направления нормалей

$$\varphi_i^u = \varphi_i - u \quad (4)$$

будут удовлетворять этому требованию, т. е.

$$\Sigma p_i \cos \varphi_i^u \sin \varphi_i^u = \frac{1}{2} \Sigma p_i \sin 2\varphi_i^u = \frac{1}{2} \Sigma p_i \sin 2(\varphi_i - u) =$$

$$= \frac{1}{2} (\Sigma p_i \sin 2\varphi_i \cos 2u - \Sigma p_i \cos 2\varphi_i \sin 2u) = 0. \quad (5)$$

Рассматривая это выражение, можно сделать вывод, что $\Sigma p_i \sin 2\varphi_i$ есть сумма проекций отрезков p_i, имеющих направления $2\varphi_i$ на ось y (рис. 1), а $\Sigma p_i \cos 2\varphi_i$ — сумма проекций

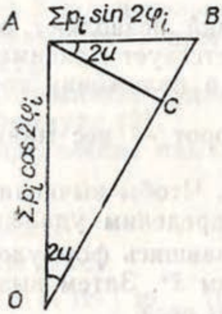

Рис. 1. Взаимодействие линий положения.

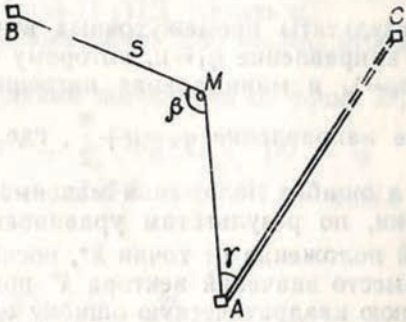

Рис. 2. Схема определения точки M.

тех же отрезков на ось x. Следовательно, отрезок OB, являющийся векторной суммой этих проекций, имеет направление $2u$. В самом деле

$$AC = \Sigma p_i \cos 2\varphi_i \sin 2u = \Sigma p_i \cos 2u \sin 2\varphi_i,$$

поэтому их разность в выражении (5) равна нулю. Но отсюда следует вывод, что можно вычислить направление главной собственной оси матрицы N по формуле

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\Sigma p_i \sin 2\varphi_i}{\Sigma p_i \cos 2\varphi_i}. \quad (6)$$

Тогда собственные значения матрицы

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma p_i \cos^2 \varphi_i^u & 0 \\ 0 & \Sigma p_i \sin^2 \varphi_i^u \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а компоненты вектора свободных членов

$$\bar{f}^u = \begin{pmatrix} \Sigma p_i q_i \cos \varphi_i^u \\ \Sigma p_i q_i \sin \varphi_i^u \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Теперь поправки $\delta \bar{x}^u$ в системе собственных осей матрицы N вычисляются элементарно просто:

$$\delta \bar{x}^u = \begin{pmatrix} f_1^u/\lambda_1 \\ f_2^u/\lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Однако вектор $\delta \bar{x}^u$ нужно преобразовать к исходному базису:

$$\delta \bar{x} = B_{-u} \delta \bar{x}^u, \tag{10}$$

где $B_{-u} = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$ — матрица вращения на угол u против часовой стрелки. Тогда уравненные координаты определяемой точки имеют вид

$$\bar{x}^* = \bar{x}^\circ + \delta \bar{x}. \tag{11}$$

Результаты промежуточных вычислений позволяют определить направление $\varphi_1 = u$, которому соответствует максимальный вес $p_1 = \lambda_1$ и минимальная погрешность в положении точки, а также направление $\varphi_2 = u + \frac{\pi}{2}$, где наоборот — вес минимальный, а ошибка положения максимальная. Чтобы вычислить эти ошибки, по результатам уравнивания определим удаления q_i^* линий положения от точки $\bar{x}^*$, воспользовавшись формулой (2), где вместо значений вектора $\bar{x}^\circ$ подставим $\bar{x}^*$. Затем вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma p_i q_i^{*2}}{n-2}} \tag{12}$$

и найдем значения экстремальных ошибок:

$$m_{\min} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad m_{\max} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{13}$$

Погрешности остальных направлений заключены между экстремальными и при необходимости их можно вычислить для любого известного направления γ относительно главной собственной оси u по формуле

$$m_\gamma^2 = m_{\max}^2 \cos^2 \gamma + m_{\min}^2 \sin^2 \gamma. \tag{14}$$

Основные процедуры, представленные здесь, оформим в виде программ для микрокалькулятора типа «Электроника БЗ-34» согласно [2]. Сочетание PN означает, что регистр N предназначен для размещения указанного числа или результата действия, ПN — означает действие занесения числа в регистр N, а ИПN — действие извлечения числа из регистра N.

1. Вычисление направления главной собственной оси по формуле (6). Распределение памяти: Р7 — $\Sigma p_i \sin 2\varphi_i$ Р8 — $\Sigma p_i \times \cos 2\varphi_i$ Р9 — φ_i

Р6 — p_i

. . . . .

РД — u

Программа:

0 П7 П8 φ_i П9
p_i П6 в/о с/п

$i=2, 3, \dots n$

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
ИП9	2	×	П9	F sin	ИП6	×	ИП7	+	П7
69	02	12	49	1С	66	12	67	10	47

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ИП9	F cos	ИП6	×	ИП8	+	П8	с/п	БП	00
69	1Г	66	12	68	10	48	50	51	00

Досчитываем вручную: ИП7 ИП8 : F arctg (если содержимое регистра 8 отрицательное, то 180+) 2 : ПД. Читать u.

Первая строка программы вычисляет $\Sigma p_i \sin 2\varphi_i$, вторая — $\Sigma p_i \cos 2\varphi_i$.

2. Вычисление удалений линий положения от точки $\bar{x}^\circ$, или $\bar{x}^*$ по формуле (2).

Распределение памяти: Р7 — $x_i^\text{т}$ Р8 — $y_i^\text{т}$ Р9 — φ_i

Р4 — x° Р5 — y° Р6 — $\psi_i(L)$

Программа:

x° П4 y°П5 БП 20
$x_i^\text{т}$ П7 $y_i^\text{т}$ П8 φ_i П9
$\psi_i(L)$ П6 с/п

$i=2, 3, \dots n$

20	21	22	23	24	25
ИП7	ИП4	—	ИП9	F cos	×
67	64	11	69	1Г	12

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
ИП8	ИП5	—	ИП9	F sin	×	+	ИП6	+	с/п	БП	20
68	65	11	69	ГС	12	10	66	10	50	51	20

Чтобы не вести записи на бумаге, можно значения q_i записывать в регистры нижнего ряда клавиатуры: q_1 ПО, q_2 ПА, q_3 ПВ, ... (Помните, что регистр Д занят!). Первой строкой вычисляется $(x_i^\text{т}-x^\circ)\cos\varphi_i$, второй к нему добавляется $(y_i^\text{т}-y^\circ)\sin\varphi_i$.

3. Уравнительные вычисления. Вычисляется λ_i по (7), f_i^u по (8) и δx_i^u по (9).

Распределение памяти: Р7 — φ_i^u Р8 — p_i Р9 — q_i

Р4 — λ_1 Р5 — λ_2 Р6 — f_1^u

Р1 — рабочий Р2 Р3 — f_2^u

Программа:

0 П3 П4 П5 П6 БП 38
φ_i ИПД П7 p_i П8
↑ q_i П9 с/п
$i = 2, 3, \ldots, n$

38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
ИП8	ИП7	F cos	×	П1	F Bx	×	ИП4	+	П4
68	67	1Г	12	41	0	12	64	10	44

48	49	50	51	52	53
ИП1	ИП9	×	ИП6	+	П6
61	69	12	66	10	46

54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
ИП8	ИП7	F sin	×	П1	FBx	×	ИП5	+	П5
68	67	1С	12	41	0	12	65	10	45

64	65	66	67	68	69	70	71	72
ИП1	ИП9	×	ИП3	+	П3	с/п	БП	38
61	69	12	63	10	43	50	51	38

Далее в режиме ручного счета: ИП6 ИП4 : П9 читать δx^u,
ИП3 ИП5 : П6 читать δy^u.

В первой строке программы вычисляется $\lambda_1 = \Sigma p_i \cos^2 \varphi_i^u$, во второй — $f_1^u = \Sigma p_i q_i \cos \varphi_i^u$, затем — $\lambda_2 = \Sigma\, p_i \sin^2 \varphi_i^u$ и, наконец, — $f_2^u = \Sigma\, p_i q_i \sin \varphi_i^u$.

4. Поворот к исходной системе координат по (10).
Распределение памяти: Р7 — $\cos u$ Р8 — $-\sin u$ Р9 — δx^u
Р4 — $\sin u$ Р5 — $\cos u$ Р6 — δy^u

Программа:

ИПД (—) Fcos П7 П5 ИПД
F sin П4 (а) П8 БП 73 с/п

читать δx с/п
читать δy

73	74	75	76	77	78	79	80
ИП7	ИП9	×	ИП8	ИП6	×	+	с/п
67	69	12	68	66	12	10	50

81	82	83	84	85	86	87	88
ИП4	ИП9	×	ИП5	ИП6	×	+	с/п
64	69	12	65	66	12	10	50

В первой строке имеем окончательное значение поправки δx, во второй — δy. Вычисление уравненных координат по формуле (11) можно производить параллельно с работой программы 4, т. е., получив δx, сразу набрать $x^\circ +$, читать x^*, затем с/п; получив δy, набрать $y^\circ +$, читать y^*.

Для оценки точности по программе 2 вычисляем q_i. При этом вместо x° и y° набираем x^* и y^*. Затем используем формулы (12) и (13).

Пример. Относительно трех исходных пунктов А, В и С (рис. 2) определяем положение точки M, для чего измерены углы γ и β и расстояние s. Координаты исходных пунктов в метрах, результаты измерений и их точность имеют следующие значения:

$$x^A = 5012{,}34 \quad y^A = 2789{,}01 \quad \gamma = 67°38',8\,(\pm 0',1)$$
$$x^B = 6678{,}90 \quad y^B = 1234{,}56 \quad \beta = 123°\,45',6\,(\pm 0',1)$$
$$x^C = 7219{,}98 \quad y^C = 4567{,}89 \quad s = 678{,}9\,(\pm 0{,}1\text{ м}).$$

Приближенные координаты точки M приняты равными $x^\circ = 6618{,}4$ м, $y^\circ = 1911{,}0$ м. Определяем направление нормалей линий положения. Для направления AM значение нормали

$$\varphi_\gamma = \operatorname{arctg}\frac{y^\circ - y^A}{x^\circ - x^A} + 90° = 61°,\ 335.$$

Для измеренного на точке M угла β найдем радиус описанной окружности:

$$R = \frac{s_{AB}}{2\sin\beta} = 1370{,}61\text{ м},$$

где $s_{AB} = 2278{,}98$; направление на ее центр $\alpha_{AO} = \alpha_{AB} + 90° - \beta = 283{,}°233$, и координаты центра имеют вид

$$x_0 = x^A + R\cos\alpha_{AO} = 5326{,}10, \quad y_0 = y^A + R\sin\alpha_{AO} = 1454{,}79.$$

Теперь направление градиента в окрестности точки $\bar{x}^\circ$

$$\varphi_B = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0 - y^\circ}{x_0 - x^\circ} = 199°,444.$$

Наконец, градиент расстояния имеет направление

$$\varphi_s = \alpha_{BM} = \operatorname{arctg}\frac{y^\circ - y_B}{x^\circ - x_B} = 95°,111.$$

Веса линий положения определим через модули градиентов по формуле

$$p = k\frac{|g_i|^2}{m_L^2}. \qquad (15)$$

Примем $k = 1/1000$, тогда для направления, где $|g_\alpha| = \dfrac{1}{s}$, имеем

$$p_\alpha = k\left(\frac{\rho'}{s m_\gamma'}\right)^2 = \frac{1}{1000}\left(\frac{3438'}{1830\cdot 0'1}\right) = 0{,}35;$$

для угла, где $|g_\beta| = \dfrac{s_{AB}}{s_{AM}\cdot s_{BM}}$, вес составляет

$$p_\beta = k\left(\frac{s_{AB}\,\rho'}{s_{AM}s_{BM}m_\beta'}\right) = 3{,}97;$$

для расстояния $|g_s| = 1$ и $p_s = 0{,}1$.

По программе 1 направление главной собственной оси $u = 22^\circ{,}327$. При вычислении удалений по программе 2 вводим: $i=1$, x^A, y^A, φ^A, $\psi(\alpha)=0$, получаем $q_A = -0{,}0065$, записываем в РО; $i=2$, x_0, y_0, φ^B, $\psi(\beta) = -1370{,}61$, получаем $q_\beta = -0{,}1477$, пишем в РА; $i=3$, x^B, y^B, φ_s, $\psi(s) = 678{,}9$, получаем $q_s = -0{,}2402$, пишем в РВ.

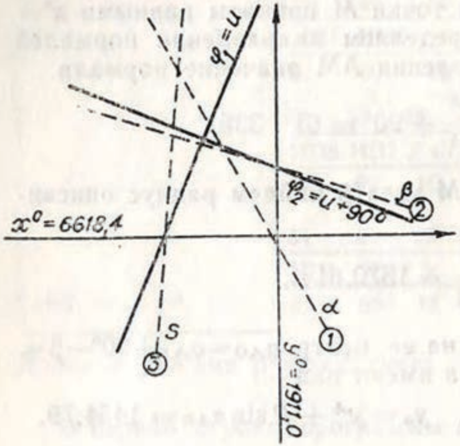

Рис. 3. Линии положения измеренных величин:
1 — α, *2* — β, *3* — s — и эквивалентные им линии положения $\varphi_1 = u$ и $\varphi_2 = u + 90^\circ$ в окрестности точки *М*.

По программе 3 в первом цикле после БП 38 набираем 61,335 ИПД — П7 0,35 П8 ИПО П9 с/п и т. д. После третьего цикла получаем собственные числа $\lambda_1 = 4{,}18$ и $\lambda_2 = 0{,}24$. Контроль вычисления собственных чисел $\Sigma\lambda = \Sigma p = 4{,}42$. Обусловленность $T = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 17$.

Поправки в собственных осях $\delta x^u = 0{,}138$, $\delta y^u = -0{,}225$ после преобразования к собственному базису программой 4 дали окончательные координаты: $x^* = 6618{,}61$, $y^* = 1910{,}84$. Для оценки точности по программе 2 вычислены $\bar{q}^* = (0{,}028; -0{,}0013; -0{,}066)$. Тогда $\mu = 0{,}0267$; $m_{\min} = 0{,}013$; $m_{\max} = 0{,}055$ м.

1. *Келль Н. Г.* Избранные труды. М., 1964. 2. *Реминский А. А., Шипулин В. Д., Александров В. Т.* Применение программируемых микрокалькуляторов «Электроника БЗ-34, МК-54, МК-56» для геодезических вычислений. Харьков, 1986.

Статья поступила в редколлегию 13. 04. 88