

**РІШЕННЯ ПРЯМИХ ЗАДАЧ ГРАВІМАГНІТОРОЗВІДКИ ДЛЯ СКЛАДНИХ МОДЕЛЕЙ СЕРЕДОВИЩА ЗА ДОПОМОГОЮ ШВИДКОЇ ЗГОРТКИ**

Представлено швидкий спосіб рішення 2D/3D прямих задач гравіроздавкн і магніторозздавкн для складних геологічних моделей. Апроксимаційною конструкцією моделей є щільна упаковка дуже великої кількості малих однорідних паралелепіпедів (може бути 10<sup>8</sup> і більше). Спосіб апроксимації відповідає постановці лінійних задач. Розроблений алгоритм може використовуватись для швидкого обчислення потенціалу або будь-якої його похідної.

**Ключові слова:** пряма задача 2D/3D гравімагніторозздавкн; апроксимаційна конструкція геологічних середовищ; швидке перетворення Фур'є.

Прямі задачі гравіроздавкн і магніторозздавкн застосовувались і будуть застосовуватись як у моделюванні будови геологічних середовищ, так і при обґрунтуванні та дослідженні інтерпретаційних можливостей цих геофізичних методів. Про прямі задачі як важливі інструменти інтерпретації потенціальних полів сказано в роботах Г.Я.Голіздри, С.С.Красовського, В.І.Старостенко. Але створення швидких і достатньо точних алгоритмів прямої задачі гравімагніторозздавкн, які відповідали б *принципу максимальної простоти та універсальності* [Страхов, 1982, 1983], актуально і сьогодні. Зокрема, основною причиною необхідності розробки принципово нових методів рішення обернених задач без рішення прямих задач В.М.Страхов [2005] вважав відсутність ефективних способів їх рішення для моделей геологічного середовища з оптимальною апроксимацією – *кінцево-елементним описом середовища* (великою кількістю, понад 10<sup>5</sup>, малих однорідних кубиків).

У доповіді представлено швидкий спосіб рішення прямої задачі гравіроздавкн і магніторозздавкн для складних геологічних моделей, в якості апроксимаційної конструкції яких є щільна упаковка дуже великої кількості малих однорідних паралелепіпедів (звісно складніших за кубики і яких може бути понад 10<sup>8</sup> навіть для розрахунків на комп'ютерах середньої потужності за реальний інтервал часу – перші хвилини). Спосіб апроксимації відповідає постановці лінійних задач. Подібний алгоритм типу лінійної згортки, який дозволяє розраховувати трансцендентні функції для кожного елементарного тіла *лише один раз*, запропонований в роботі [Варфоломеев, 1984]. Для суттєвого підвищення швидкості рішення прямої задачі гравіроздавкн автор трансформував лінійну згортку у колову [Анікеев, 1991]. Явища, спричинені цією трансформацією і застосуванням швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), тобто швидкою згорткою, враховані структурними перебудовами підінтегральних функцій. Алгоритм швидкої згортки можна використати для визначення будь-яких похідних потенціалу.

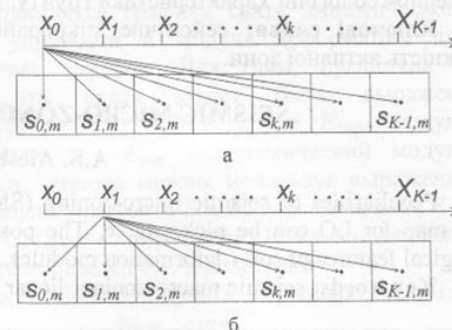
*Апроксимаційна конструкція.* Двовимірною областю *V* розподілу джерел є прямокутною,

тривимірною – паралелепіпедом; вісь *z* спрямована вниз; область *V* упакована прямокутними призмами з площею перетину *s* = Δ*x* · Δ*z* для 2D задач, або паралелепіпедом з об'ємом *v* = Δ*x* · Δ*y* · Δ*z* для 3D задач; координати геометричних центрів елементарних тіл (*x<sub>k</sub>*, *y<sub>ℓ</sub>*, *z<sub>m</sub>*) визначаються мережею точок: *x<sub>k</sub>* = (k-1) · Δ*x*, *y<sub>ℓ</sub>* = (ℓ-1) · Δ*y*, *z<sub>m</sub>* = *Z<sub>0</sub>* + (m-1) · Δ*z* + Δ*z*/2, де *k* = 1, 2, ... *K*; ℓ = 1, 2, ... *L*; *m* = 1, 2, ... *M*; *Z<sub>0</sub>* – початок області *V* по осі *z*; модельне поле *U* розраховується в точках, розташованих над геометричними центрами однорідних елементарних тіл, на площині *z* = 0.

*Алгоритм.* Для спрощення розглянемо двовимірну задачу гравіроздавкн. Поле в точці *x<sub>0</sub>* для моделі, складеної з щільного ряду *K* елементарних тіл *S<sub>k,m</sub>* на рівні *z<sub>m</sub>* = const (рис. 1а):

$$U_m(x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} \sigma_{k,m} \int_{x_k - \frac{\Delta x}{2}}^{x_k + \frac{\Delta x}{2}} \int_{z_m - \frac{\Delta z}{2}}^{z_m + \frac{\Delta z}{2}} \frac{2 \cdot f \cdot \zeta}{(\xi - x_0)^2 + \zeta^2} \partial \xi \cdot \partial \zeta \approx \sum_{k=0}^{K-1} \sigma_{k,m} \cdot S_{k,m}, \quad (1)$$

де *S<sub>k,m</sub>* – поле в точці *x<sub>0</sub>* від одиничного джерела елементарної форми *S<sub>k,m</sub>* і по суті є коефіцієнтами прямої задачі (зображено стрілками); σ<sub>*k,m*</sub> – інтенсивність джерела; *f* – гравітаційна стала.



**Рис. 1.** Апроксимаційна конструкція моделі

Для точки  $x_1$ , коли всі тіла  $S_{k,m}$  одної форми і сталих розмірів та модель доповнена справа нульовим джерелом  $\sigma_{K,m}$ :

$$U_m(x_1) = \sum_{k=0}^K \sigma_{k,m} \cdot S_{k-1,m} \quad (2)$$

$S_{-1,m} = S_{1,m}$  (симетрія коефіцієнтів, рис. 1б). Для останньої точки  $x_{K-1}$ :

$$U_m(x_{K-1}) = \sum_{k=0}^{2K-1} \sigma_{k,m} \cdot S_{k-K+1,m}; \sigma_{k \geq K,m} = 0. \quad (3)$$

Тепер доповнимо модель нульовими джерелами зліва (заштрихована область, рис. 2) зі збереженням симетрії  $S$ . Модель, перебудована на усі рівні  $z_m$  області  $V^*$ , показано (крім зони нульових джерел справа) на рис. 3. Зазначені процедури перетворюють (1+3) на операцію згортки двох функцій (конструювання згортки подібно описана у монографіях [Козлов, 1973, Рабинер, 1978]):

$$U_m^*(k) = \sum_{k_0=0}^{2 \cdot K-1} G_{k_0,m} \cdot S_{k_0-k,m} = G_{k,m} * S_{k,m} \quad (4)$$

де для розподілу джерел  $\sigma$ , доповненого нульовими значеннями, введено позначення  $G$ .

Для всього розрізу згортка (4) має вигляд:

$$U^*(k) = \sum_{m=1}^M G_{k,m} * S_{k,m} \quad (5)$$

У двовимірному випадку перебудови збільшують область  $V^*$  у два рази, у тривимірному – у чотири рази (рис. 4).

Згідно з однією з основних теорем про спектри інтеграл згортки

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-\xi) \cdot G(\xi) d\xi \quad (6)$$

у спектральній області є добутком їх спектрів:

$$\hat{U}(\omega) = \hat{S}(\omega) \cdot \hat{G}(\omega) \quad (7)$$

У теорії дискретних лінійних систем з теоремою про згортку і властивостей ДПФ випливає, що добуток ДПФ двох кінцевих послідовностей і наступне обернене ДПФ надає той же результат, що і колова згортка *періодичних послідовностей, утворених із заданих кінцевих послідовностей* [Рабинер, 1978]. Згортка періодичних послідовностей періодична і має той же період, що і самі послідовності. Лінійна згортка (4) двох кінцевих послідовностей  $G$  (функції розподілу джерел) і  $S$  (функції елементарних форм), кожна з яких має довжину  $2 \cdot K-1$ , є кінцевою й має довжину  $2 \cdot (2 \cdot K-1)-1$ . Оскільки основний період колової згортки повинен бути тієї ж довжини, то для колової згортки необхідно, щоб послідовності  $G$  і  $S$  містили по  $2 \cdot (2 \cdot K-1)-1$  значень, що досягається доповненням кожної з них відповідним числом нулів. Але задача полягає у визначенні поля лише над областю  $V$ , тому допустимо колове накладання (спотворення поля дзеркальними частотами) за її межами. Це означає, що послідовності  $G$  і  $S$  додатково нарощувати нульовими значеннями не потрібно.

Отже, лінійну згортку (5) легко трансформувати у колову згортку:

$$U^*(x_k) = \left( \sum_{m=1}^M \hat{G}_{k,m} \cdot \hat{S}_{k,m} \right)^{\vee} \quad (8)$$

де  $(\cdot)^{\vee}$  - обернене ДПФ;  $\hat{G}_{k,m}$  і  $\hat{S}_{k,m}$  - спектри.

Періодична функція  $U^*$  тотожна полю  $U$  над заданою областю  $V$ , тобто у межах першої половини основного періоду. Вочевидь алгоритм (8) є також способом визначення потенціалу та його похідних, для чого достатньо аналітично перевизначити функцію  $S$  за *точними формулами*. Використання подвійної точності обчислень практично вирішує проблему *стійкості обчислень* ДПФ і різниці великих чисел при розрахунках  $S$ .

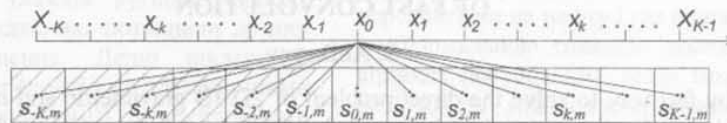


Рис. 2. Апроксимаційна конструкція моделі на рівні  $z_m = const$

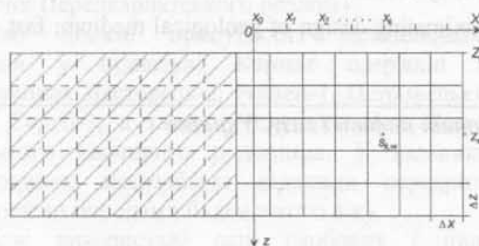


Рис. 3. Апроксимаційна конструкція двовимірної області  $V^*$

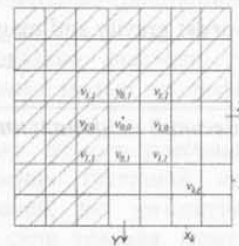


Рис. 4. Зріз апроксимаційної конструкції тривимірної області  $V^*$  по рівню  $z_m = const$

Колова згортка називається швидкою згорткою коли виконується за допомогою швидкого перетворення Фур'є. Воно потребує  $(2 \cdot K) \cdot \log_2(2 \cdot K)$  операцій добутку і складання [Рабинер, 1978], де  $(2 \cdot K)$  – довжина області  $V^*$ . Якщо не враховувати витрати часу на розрахунок коефіцієнтів прямої задачі, то кількість операцій для розрахунку поля у  $K$  точках над областю  $V$  (при  $M=1$ ) за способом [Варфоломеев, 1984] дорівнює приблизно  $2 \cdot K^2$ . Тому при кількості точок по профілю  $K=1032$  алгоритм (8) швидше у 90 разів. Для тривимірної області розмірами у  $1024 \cdot 1024 \cdot 1$  ефективність швидкої згортки (8) буде більша в 4500 разів!

*Апроксимаційна конструкція бокових зон.* В практиці гравітаційного і магнітного моделювання величезне значення має спосіб врахування впливу бокових зон. Нульові доповнення функції  $G$  можна використовувати для облямування моделі так званими *ближніми боковими зонами*, що особливо важливо для тривимірних моделей.

#### Література

- Аникеев С.Г. Об одном методе решения прямой задачи грави- и магнитометрии. – Львов. 1991, №28. – С. 28-33.  
 Варфоломеев В.А. Об одной схеме решения прямой задачи гравиразведки // Разведка и

- разработка нефтяных и газовых месторождений. – Львов. 1984, №21. – С. 38-40.  
 Козлов Е.А., Гогоненков Г.Н., Лернер Б.Л. и др. Цифровая обработка сейсмических данных. – М.: Недра, 1973, 312с.  
 Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978, 848с.  
 Страхов В.Н. Аналогия аналитических выражений элементов гравитационного и магнитного полей двумерных и трехмерных многоугольных тел и оптимальные вычислительные процессы решения прямых задач для этих тел // Теория и практика интерпретации гравитационных аномалий. – М.: Наука, -1982. -С.59-137.  
 Страхов В.Н., Шулайя Т.В. Решение прямых трехмерных задач гравиметрии и магнитометрии при произвольных непрерывных законах распределения плотности и намагниченности // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1983. - №9. – С.57-74.  
 Страхов В.Н. Решение обратных задач гравиметрии без решения прямых // Новые теоретические, алгоритмические и технологические разработки в разведочной геофизике. –Препр./ Киев: 2005. – С. 23-25.

### РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМАГНИТОРАЗВЕДКИ ДЛЯ СЛОЖНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРОЙ СВЕРТКИ

С.Г. Аникеев

Представлен быстрый способ решения 2D/3D прямой задачи гравиразведки и магниторазведки для сложных геологических моделей. Аппроксимационной конструкцией моделей является плотная упаковка очень большого числа небольших однородных параллелепипедов ( $10^8$  и более). Способ аппроксимации соответствует постановке линейных задач. Разработанный алгоритм может быть использован для быстрого вычисления потенциала и его производных.

**Ключевые слова:** прямая задача 2D/3D гравимагниторазведки; аппроксимационная конструкция геологических сред; быстрое преобразование Фурье.

### THE SOLUTION OF A GRAVITY AND MAGNET DIRECT FOR COMPLEX MEDIUM BY MEANS OF FAST CONVOLUTION

S. Anikayev

Submitted by fast way to solve the direct problem of 2D/3D gravimetric and magnetic prospecting for complex geological models. Approximating design of models is very dense packing of large numbers of small homogeneous parallelepipeds ( $10^8$  and over). The method of approximation corresponds to the formulation of linear problems. The developed algorithm can be used to quickly calculate the potential and its derivatives.

**Key words:** gravity and magnet 2D/3D direct; approximating design of geological medium; fast Fourier transform.

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна*