

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ ПОЛЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ СДВИГОВЫМ РАЗРЫВОМ

Наблюдения сейсмичности в сейсмоактивных районах мира показывают, что сильные землетрясения приурочены преимущественно к глубинным разломам. Разломы — это ослабленные зоны, вызываемые нарушениями сплошности земной коры, поэтому напряжения, обуславливающие землетрясения в таких зонах, ниже, чем в окружающей среде.

Землетрясения происходят вследствие накопления внутренних напряжений в некотором объеме.

Некоторые приближенные оценки при наблюдении сейсмических явлений (объяснение подготовки, характера и возможности прогнозирования землетрясения в будущем) можно получить, применив аппарат линейной механики деформируемого твердого тела. Основной момент при изучении этого явления — описание процесса ломки среды под действием внутренних сил и в меньшей мере внешних.

Проблема эта очень сложная, поскольку предмет изучения — разломы — до конца не выяснен. Очевидно, следует иметь ее комплексную аналитическую формулировку, но из-за неполного представления о самом процессе возникновения разломов в земной коре исследования вынуждены проводиться поэтапно, освещая поочередно отдельные стороны проблемы. Настоящая работа посвящена вопросам, касающимся процессов подготовки землетрясения и поискам его предвестников. Рассмотрим одну из моделей подготовки землетрясения — сдвиг по разлому. Он ведет к деформациям и напряжениям в окружающем пространстве. Таким образом, необходимо получить количественную картину полей смещений и напряжений. Поля смещений измеряем путем повторного нивелирования и деформационными измерениями и таким образом сравниваем теоретическое поле с наблюдаемым.

Для решения этой проблемы поставлена задача определения поля перемещений и напряжений, вызванных дислокацией на существующем разрыве. Нужно определить напряженно-деформированное состояние в полупространстве с разломом, расположенным в вертикальной плоскости к поверхности Земли под прямым углом. Разлом моделируем скачком нормальных перемещений, известных из геодезических измерений. Рассмотрим упругую модель, описывающую процессы, происходящие в земной коре до одного года. Это начальное приближение задачи по определению поля перемещений и напряжений в окрестности реального разлома; в дальнейшем учитываем скачок горизонтальных перемещений на берегах разлома, выход разлома на свободную поверхность под произвольным углом, а также рассматриваем реологическую модель.



В математическом плане рассматриваемая задача сводится к нахождению в декартовой системе координат решения уравнений равновесия в напряжениях для полупространства в случае отсутствия массовых сил [2]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего условию совместности Бельтрами—Мичелла

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2)$$

и следующим граничным условиям

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

$$n_x(0^-, y) - n_x(0^+, y) = 0; \quad \text{при } -\infty < x < \infty \quad (3)$$

$$y = 0$$

$$n_y(0^-, y) - n_y(0^+, y) = \delta, \quad \text{если } -2h \leq y \leq 0. \quad (4)$$

Здесь  $x=0^+$  и  $x=0^-$  ( $-2h \leq y \leq 0$ ) обозначают соответственно левый и правый берега разлома.

Для решения краевой задачи уравнений математической физики (1)–(4) применим часто используемый для полубесконечных областей метод отражения. Сущность его состоит в следующем (см. рисунок). Представим, что полуплоскость дополняется до плоскости, при этом разлом (отрезок  $x=0$ ,  $-2h \leq y \leq 0$  с заданным скачком перемещений на его берегах) в нижней полуплоскости зеркально отображается в разлом в верхней полуплоскости (отрезок  $0 \leq y \leq 2h$ ,  $x=0$ ). Теперь решение задачи приобретает вид суперпозиции двух решений для неограниченного пространства. Таким образом, полученное решение обладает тем свойством, что на линии  $y=0$  нормальные усилия  $\sigma_{yy}$  не равны нулю (касательные усилия отсутствуют в силу симметрии). Чтобы удовлетворить граничное условие (3), нужно определить дополнительное решение, снимающее нормальные напряжения с границы полупространства. Тогда искомое решение для полуплоскости  $y \leq 0$  можно записать в виде

$$u_i = \sum_{k=1}^3 u_i^k, \quad \tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \tau_{ij}^k(i, j = x, y). \quad (5)$$

При поиске решений  $u^k$ ,  $\tau_{ij}^k$  ( $k=1, 2$ ) удобно ввести в рассмотрение локальные системы координат  $x_k 0_k y_k$  с центрами в серединах разломов (см. рисунок). Граничные условия в этих координатах представляем следующим образом:

$$u_x^k(x_k, 0^-) - u_x^k(x_k, 0^+) = \delta_k, \quad |x_k| \leq h, y_k = 0 \quad (6)$$

$$u_y^k(x_k, 0^-) - u_y^k(x_k, 0^+) = 0.$$

Отметим при этом, что  $\delta_1 = \delta$ ,  $\delta_2 = -\delta$ .

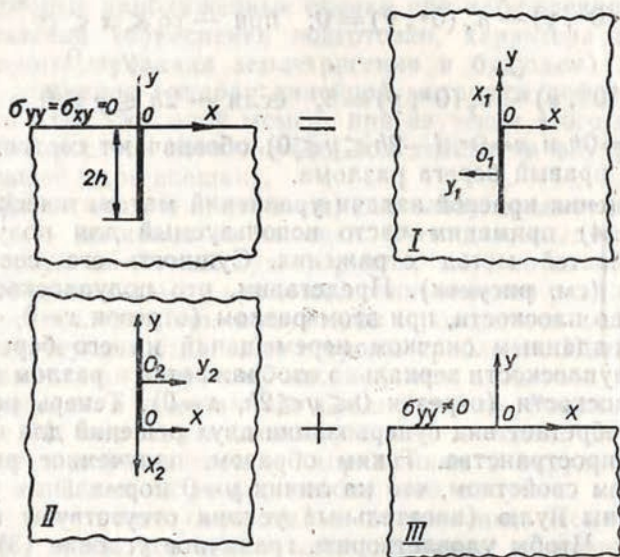
Решение граничных задач (6) имеет вид [1] при  $k=1, 2$

$$u_x^k = \delta_k \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial f^k(x_k, y_k)}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial^2 f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k^2} \right],$$

$$u_y^k = \delta_k \left[ (1-2\nu) \frac{\partial f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial^2 f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k \partial y_k} \right],$$

$$\sigma_{xx}^k = 2G\delta_k \left[ 2 \frac{\partial^2 f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k \partial y_k} + y_k \frac{\partial^3 f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k \partial y_k^2} \right],$$

$$\sigma_{yy}^k = -2G\delta_k y_k \frac{\partial^3 f^k(x_k, y_k)}{\partial x_k \partial y_k^2},$$



Напряженно-деформированное поле, обусловленное сдвиговым разрывом.

$$\sigma_{xy}^k = 2G\delta_k \left[ \frac{\partial^2 f^k(x_k, y_k)}{\partial y_k^2} + y_k \frac{\partial^3 f^k(x_k, y_k)}{\partial y_k^3} \right], \quad (7)$$

где

$$f^k(x_k, y_k) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y_k \left( \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_k - h} - \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_k + h} \right) - (x_k - h) \ln \sqrt{(x_k - h)^2 + y_k^2} + (x_k + h) \ln \sqrt{(x_k + h)^2 + y_k^2} \right];$$

$G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Принимая во внимание соотношения (7) и воспользовавшись известными формулами преобразования компонент тензора напряжений при переходе от одной системы декартовых



координат к другой, в явном виде запишем граничные условия задачи [1]:

$$\sigma_{yy}^3 = \frac{G\delta}{\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{x} - \frac{x(x^2 + 2h^2)}{(x^2 + 4h^2)^2} \right] \equiv p(x),$$

$$\sigma_{xy}^3 = 0 \quad \text{при } y = 0, -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Для решения краевой задачи теории упругости (1), (2), (8) применяем одномерное интегральное преобразование Фурье по координате  $x$ . Используя результаты работы [3] и учитывая антисимметричность функции  $p(x)$ , получаем

$$\sigma_{xx}^3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (1 - \alpha y) e^{\alpha y} \hat{p}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha,$$

$$\sigma_{yy}^3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (1 - \alpha y) e^{\alpha y} \hat{p}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha,$$

$$\sigma_{xy}^3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha \hat{p}(\alpha) e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \quad y < 0, \quad (9)$$

где

$$\hat{p}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} p(x) \sin \alpha x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G\delta}{1-\nu} (1 - e^{-2ah} - 2ah e^{-2ah}).$$

Интегрируя соотношения обобщенного закона Гука, определяем компоненты вектора перемещений  $u_y^3, u_x^3$ . При этом следует отметить, что все интегралы удалось свести к табличным [4], т. е. получено замкнутое аналитическое решение в виде комбинации элементарных функций.

Таким образом, используя соотношения (7), (9), (5), после преобразований получаем окончательные выражения для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в полуплоскости с разломом, выходящим на свободную поверхность по нормали к этой поверхности

$$u_x = \frac{\delta}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y+2h)^2}{x^2 + (y-2h)^2}} + 2 - \frac{x^2}{x^2 + (y+2h)^2} - \frac{(x^2 + 2y^2)[x^2 + (y-2h)^2] - 8hy(y-2h)^2}{[x^2 + (y-2h)^2]^2} \right\},$$

$$u_y = \frac{\delta}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{y-2h} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y+2h} \right] 2(1-\nu) + \right.$$

$$\left. + x \left[ \frac{y-2h}{x^2 + (y-2h)^2} - \frac{y+2h}{x^2 + (y+2h)^2} \right] + 4(1-\nu) \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \arctg \frac{y-2h}{x} - \frac{2hx}{x^2 + (y-2h)^2} \Big] - 2xy \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{x^2 + (y-2h)^2} + \frac{4h(y-2h)}{[x^2 + (y-2h)^2]^2} \right] \Big\}, \\
\sigma_{xx} = & \frac{G\delta x}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(y+2h)^2 - x^2}{[x^2 + (y+2h)^2]^2} + \frac{2}{x^2 + (y-2h)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(y-2h)^2 - x^2 - 4(y^2 - 4h^2)}{[x^2 + (y-2h)^2]^2} + \frac{8hy[3(y-2h)^2 - x^2]}{[x^2 + (y-2h)^2]^3} \right\}, \\
\sigma_{yy} = & \frac{G\delta x}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{x^2 + 3(y+2h)^2}{[x^2 + (y+2h)^2]^2} - \frac{2}{x^2 + (y-2h)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{x^2 - (y-2h)^2}{[x^2 + (y-2h)^2]^2} + \frac{8hy[3(y-2h)^2 - x^2]}{[x^2 + (y-2h)^2]^3} \right\}, \\
\sigma_{xy} = & - \frac{G\delta}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(y+2h)[(y+2h)^2 - x^2]}{[x^2 + (y+2h)^2]^2} - \right. \\
& \left. - \frac{(y+2h)[(y-2h)^2 - x^2]}{[x^2 + (y-2h)^2]^2} + \frac{8hy(y-2h)[(y-2h)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (y-2h)^2]^3} \right\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Приступим теперь к анализу полученных численных результатов.

Вычисления напряжений и перемещений проводим для длины разрыва  $2h=10$  км, при дислокации  $\delta=10$  см и значении модуля сдвига для земной коры  $G=3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Значения компонент напряжений и перемещений определяем до глубины  $y=20$  км с интервалом  $\Delta y=2$  и для расстояний  $x=0, 2, 5, 10, 25, 50, 100$  и  $200$  км.

Результаты вычисления компонент вектора перемещений приведены в табл. 1, 2, из данных которых следует:

1) при вертикальном перемещении  $u_y=10$  см на разломе длиной  $2h=10$  км на расстоянии от разлома  $x=2$  км вертикальное поднятие  $u_y=3,78$  см убывает с расстоянием по экспоненциальному закону и на расстоянии  $x=100$  км,  $u_y=0,03$  мм.

Таким образом, вертикальные перемещения можно определить методом повторного нивелирования, практически, до расстояния  $x=50$  км;

2) горизонтальное перемещение  $u_x$ , вызванное вертикальным перемещением  $\delta=10$  см на разломе длиной  $2h=10$  км и расстоянии от разлома  $x=2$  км,  $u_x=2,07$  см убывает, как и в предыдущем случае с расстоянием по экспоненциальному закону и стабилизируется на расстоянии  $x=50$  км. Горизонтальное перемещение на  $1,7$  см меньше, чем вертикальное в той же точке, что объясняется вертикальным движением вдоль разлома.



Анализ компонент тензора напряжений позволяет установить следующее.

1. Напряжение  $\sigma_{yy}$  остается почти одинаковым по всей глубине плоскости разрыва и достигает значения  $\sigma_{yy} \approx 10^5$  Н/м<sup>2</sup>.

2.  $\sigma_{yy}$  до расстояния  $x=10$  км положительное и имеет значение  $\approx 10^5$  Н/м<sup>2</sup>, с расстояния  $x=25$  км знак меняется на противоположный, а значение падает от  $\sigma_{yy}=10^4$  Н/м<sup>2</sup> до  $\sigma_{yy}=10$  Н/м<sup>2</sup> при  $x=200$  км. Таким образом, вертикальный сдвиг

Таблица 1

Значения вертикальных перемещений  $u_y$

y, км	x, км						
	2	5	10	25	50	100	200
-2	3.78	2.32	1.00	0.14	0.02	0.0027	0.00026
-4	3.69	2.25	1.05	0.17	0.03	0.0036	0.00034
-6	3.43	2.09	1.08	0.21	0.03	0.0050	0.00045
-8	2.87	1.88	1.10	0.25	0.04	0.0063	0.00061
-10	2.19	1.74	1.13	0.30	0.06	0.0081	0.00081
-12	1.50	1.57	1.13	0.34	0.07	0.0100	0.00105
-14	0.91	1.32	1.10	0.38	0.08	0.0120	0.00133
-16	0.60	1.05	1.03	0.41	0.10	0.0150	0.00165
-18	0.42	0.84	0.94	0.44	0.11	0.0180	0.00201
-20	0.32	0.67	0.84	0.46	0.13	0.0210	0.00241

Таблица 2

Значение горизонтальных перемещений  $u_x$

y, км	x, км						
	2	5	10	25	50	200	100
-2	2.07	1.77	1.22	0.41	0.12	0.032	0.0080
-4	1.31	1.06	0.79	0.34	0.11	0.031	0.0079
-6	0.61	0.38	0.36	0.27	0.11	0.030	0.0079
-8	-0.26	-0.27	0.0	0.20	0.10	0.030	0.0079
-10	-1.21	-0.69	-0.26	0.12	0.09	0.029	0.0078
-12	-0.69	-0.70	-0.38	0.05	0.08	0.028	0.0078
-14	-0.29	-0.59	-0.40	-0.0027	0.06	0.026	0.0071
-16	-0.13	-0.31	-0.36	-0.047	0.05	0.026	0.0076
-18	-0.06	-0.19	-0.30	-0.080	0.04	0.024	0.0075
-20	-0.02	-0.12	-0.24	-0.10	0.03	0.023	0.0074

на разломе  $\delta=10$  см, длина которого  $2h=10$  км, в окрестности разлома вызывает зону растяжения, а с расстояния  $x=25$  км зона растяжения меняется на зону сжатия.

3. Касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  удерживаются на уровне  $10^5$  Н/м<sup>2</sup> до расстояния  $x=10$  км;  $10^4 \dots 10^3$  Н/м<sup>2</sup> для расстояний от  $x=25$  до  $x=50$  км;  $10^2 \dots 10$  Н/м<sup>2</sup> на расстояниях  $x=$



= 100 ... 200 км. Таким образом, касательные напряжения, вызванные вертикальной дислокацией  $\delta = 10$  см на разломе длиной  $2h = 10$  км, ощущаются практически до расстояний  $x = 25$  км.

4. Напряжения  $\sigma_{xx}$  на расстоянии  $x = 50$  км имеют значение  $\sigma_{xx} \approx 10^4$  Н/м<sup>2</sup>. Как и в предыдущем случае, на больших расстояниях  $x = 100 \dots 200$  км поле, создаваемое дислокацией  $\delta = 10$  см, на разломе длиной  $2h = 10$  км становится стационарным и не «чувствует» дислокации.

Таким образом, в результате мгновенной дислокации, вертикальной к поверхности Земли плоскости длиной  $2h = 10$  км на величину  $\delta = 10$  см, поле напряжений ощущается до расстояний  $x = 50$  км, а поле перемещений до расстояний  $x = 100$  км. Вывод этот является ценным для прогноза землетрясений.

В Карпатском регионе сильные землетрясения преимущественно приурочены к Пенинскому глубинному разлому, разделяющему горные сооружения Карпат и Закарпатского внутреннего прогиба. Глубина очагов землетрясений не превышает  $2h = 10$  км. Интенсивность их составляет  $I = 7$  баллов. На расстоянии 50 км от границы СССР в районе Ужгорода в сейсмоактивной зоне Гуменне интенсивность землетрясений достигает  $I = 8$  баллов, что соответствует  $M = 6$  и  $K = 13$ .

Для землетрясений, наиболее часто встречающихся в Закарпатье,  $M = 4$ ,  $K = 11,2$ , длина очага  $L = 3,0$  км и смещение по разрыву  $D = 0,062$  см. Для землетрясения  $M = 5$ ,  $K = 13$ ,  $L = 8,3$  км и  $D = 3,5$  см; для землетрясения  $M = 6$ ,  $K = 14,8$ ,  $L = 23$  км и  $D = 20$  см [5]. Исходя из полученных значений напряжений и перемещений для землетрясения с  $M = 6$  и дислокацией  $D = 20$  см, нормальная компонента напряжений  $\sigma_{yy} = 0,2 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup> на глубине  $y = 2$  км и  $\sigma_{yy} = 0,3 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup> на глубине  $y = 10$  км в конечной точке дислокации; на глубине  $y = 20$  км  $\sigma_{yy} = 0,3 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>. Распределение значений  $\sigma_{yy}$  с глубиной свидетельствует, что максимальные напряжения концентрируются в вершинах разлома. Напряжения ощущаются до расстояний  $x = 50$  км. Таким образом, с целью улавливания предвестников землетрясений по измеряемым вертикальным перемещениям информативность будет ограничиваться расстояниями 50 км.

Изложенное решение — это частный случай общей проблемы изучения поля напряжений и перемещений в окрестности глубинного разлома. Отметим также, что теоретические исследования должны проверяться нивелирными и триангуляционными наблюдениями. Вывод о том, что обе компоненты перемещений ощущаются (улавливаются приборами при современной технике измерений) на расстоянии  $x = 50$  км от разлома, подтверждает наблюдения, известные из прошлых лет и имеет большое практическое значение: определяет и ограничивает дорогостоящие геодезические наблюдения.

1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М., 1987. 2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 3. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. И.

Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981. 5. Ризниченко Ю. В.  
Размеры очага корового землетрясения и сейсмический момент // Исследо-  
вания по физике землетрясений. М., 1976.

Статья поступила в редколлегию 10.02.89