

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОШИБКИ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В области математической обработки геодезических построений графическими образами следует считать геометрическую интерпретацию ошибки положения точек на плоскости или в пространстве. Такая интерпретация осуществляется путем построения геометрических критериев с помощью технических средств с целью получения или хранения в наглядной форме семантометрической информации о точности геодезических пунктов (абсолютные критерии) и элементов сети (относительные критерии). Средствами геометрической интерпретации являются персональные устройства, предназначенные для построения геометрических критериев и регистрации по ним всей необходимой информации.

С учетом сказанного в статье дана классификация геометрических критериев оценки точности и средств их построения; приведены основы «теории преобразованных форм» эллипса и подеры; выполнен сравнительный анализ критериев с точки зрения их информативности, под которой мы понимаем полноту геометрической интерпретации элементов ковариационной матрицы ошибок координат пункта

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x & \sigma_y & r_{xy} \\ \sigma_x & \sigma_y & r_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y — средние квадратические отклонения (с. к. о.) по осям координат, коэффициент корреляции между которыми равен r_{xy} .

На рис. 1 представлена классификация геометрических критериев, которые разделены на центранные и эксцентренные.

Центренные являются симметричными кривыми относительно своего центра, за который принимается начало системы отсчета их радиусов-векторов, характеризующих ошибки положения пунктов и элементов сети. Эксцентренные такой симметрией либо не обладают, либо начало системы отсчета не совпадает с их центром.

Группа центральных критериев объединяет круговые, эллиптические и трансцендентные кривые, а эксцентренных — круговые и трансцендентные.



Рис. 1. Классификация геометрических критериев оценки точности.

Ошибку положения точки на плоскости характеризуют, используя в качестве круговых критериев радиальную ошибку M , квадрат значения которой равен следу матрицы (1). Кроме M известно большое число радиальных ошибок, являющихся t -кратным подобным ее увеличением. Критический анализ этих, так же, как и других рассматриваемых ниже критериев, сделан в [2]. Отметим лишь два существенных недостатка радиальных ошибок: 1) они не позволяют геометрически иллюстрировать ни один из элементов матрицы (1); 2) при их вычислении используются только элементы, расположенные на главной диагонали матрицы. Поэтому для более объективной сравнительной оценки точности геодезических пунктов одним числом мы предложили радиальную ошибку M_h с учетом корреляции, которую можно назвать M_h -нормой матрицы (1), равную сумме абсолютных значений ее элементов

$$M_h^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|. \quad (2)$$

В качестве эллиптических критериев используем средний квадратический эллипс ошибок и его t -кратные подобные увеличения. Эллипс позволяет в явном виде, т. е. без каких-либо дополнительных построений, геометрически интерпретировать только собственные значения матрицы (1), равные квадратам его полуосей, и след этой матрицы.

Подера эллипса позволяет осуществлять геометрическую интерпретацию собственных значений, следа матрицы (1) и с. к. σ_x и σ_y .

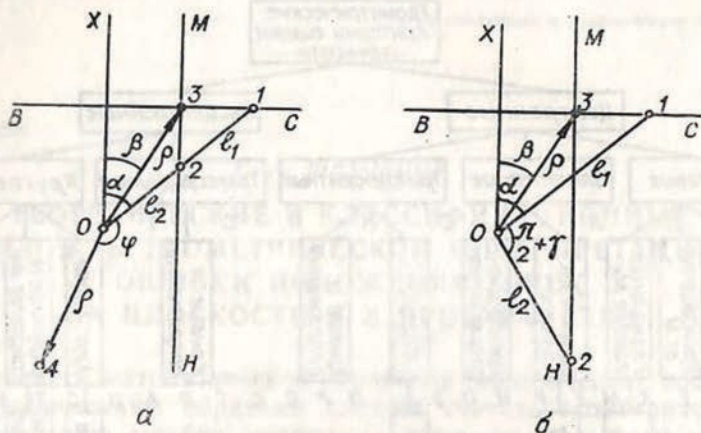


Рис. 2. Схемы к выводу уравнений кривых в полярной системе координат.

Из эксцентренных круговых критериев можно назвать малоизвестное геометрическое построение — круг Моора, прикладное значение которого в геодезии обобщено Графарендом и отражено в [2]. Этот круг дает геометрическую интерпретацию собственных значений матрицы (1), дисперсий σ_x^2 , σ_y^2 и кофакторов $\sigma_x\sigma_y r_{xy}$.

Перечисленные критерии различаются степенью семантометрической информации и не позволяют в явном виде полностью осуществлять геометрическую интерпретацию всех элементов ковариационной матрицы координат. С целью устранения этого недостатка и получения новых геометрических критериев мы разработали так называемую «теорию преобразованных форм». Ее сущность заключается в последовательном переносе радиусов-векторов эллипса или подеры на направления, изменяющиеся относительно исходных по определенному правилу (рис. 2).

Математическое обоснование теории преобразованных форм базируется на фиксированных расстояниях l_1 и l_2 , являющихся сопряженными полудиаметрами среднего квадратического эллипса ошибок. Их направление совпадает с направлением сторон засечки, если она угловая, или с перпендикулярными к

ним направлениями, если засечка линейная. При этом во внимание принимается острый угол засечки γ . Выбор этих элементов обусловлен тем, что любое геодезическое построение в принципе можно заменить простой эквивалентной засечкой с определенными l и γ , а также их непосредственной связью с геометрией геодезического построения и точностью измерения его угловых и линейных величин. Методика вычисления l_1 и l_2 для различных функций криволинейных координат и геометрическая интерпретация эквивалентной замены рассмотрены в [2].

Пусть (рис. 2, а) в полярной системе координат Ox отрезки $O-1=l_1$ и $O-2=l_2$ имеют одно направление, составляющее с полярной осью угол α . Здесь и далее положительны углы, отсчитываемые от оси Ox по ходу часовой стрелки. В [2] показано, что при геометрических построениях с использованием фиксированных расстояний l_1 и l_2 угол между ними должен быть равен $\pi/2 \pm \gamma$. Поэтому в данном случае $\gamma = \pi/2$ и, следовательно, l_1 соответствует большой, а l_2 — малой полуоси эллипса. При этом не имеет значения, с какой стороны от точки O находится точка 2. При вращении $O-1$ вокруг O взаимно перпендикулярные линии BC и MN , проходящие через точки 1 и 2, перемещаются параллельно самим себе. Кинематический анализ такой схемы показал, что если взять в качестве поверхности отсчета неподвижную плоскость чертежа и связанную с ней систему отсчета в виде оси Ox , то траекторией точки 3 будет эллипс, а траекторией точки 4 при условии постоянства угла φ и равенства $O-3=O-4$ будет подера этого эллипса. Очевидно соотношение

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 \alpha + l_2^2 \sin^2 \alpha, \quad (3)$$

где ρ — радиус-вектор эллипса, составляющий с полярной осью некоторый угол β .

Для текущих координат — углов α и β — справедливо равенство

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

В соответствии с формулами (3) и (4) уравнение подеры в полярной системе координат имеет вид

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 (\beta - \varphi) + l_2^2 \sin^2 (\beta - \varphi), \quad (5)$$

а эллипса

$$\rho^2 = \frac{l_1^2 l_2^2}{l_2^2 \cos^2 \beta + l_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), отметим, что из уравнения подеры нельзя получить уравнение эллипса ни при каком фиксированном значении φ , т. е. преобразованной формой подеры не может быть эллипс. Это объясняется тем, что эллипс — кривая второго порядка, а подера — кривая четвертого порядка.

Если в качестве поверхности отсчета взять равномерно вращающуюся относительно неподвижной оси Ox плоскость чертежа, то в зависимости от направления и соотношения K угловых частот вращения ее и отрезка $O-1$, можно преобразовать эллипс и подеру в другие кривые. При этом получаемые кривые будем называть «положительно преобразованными формами», если коэффициент преобразования $K > 0$, т. е. направления вращения совпадают, и «отрицательно преобразованными формами», если $K < 0$, когда вращения происходят в противоположных направлениях. Если $K = 0$, то исходная кривая не подвергается преобразованию.

Пусть в исходном положении чертеж ориентирован относительно оси Ox под углом δ_0 . Тогда углу поворота α будет соответствовать угол поворота плоскости чертежа:

$$\delta = K\alpha + \delta_0. \quad (7)$$

Если $K = 1$, то при $l_1 = l_2$ повороту плоскости чертежа на некоторый угол соответствует поворот радиуса-вектора ρ на этот угол и вместо кривой описывается точка 3 или 4. При $K > 1$ частота вращения плоскости чертежа больше частоты вращения отрезка $O-1$, а при $K < 1$ — меньше. Если K — число рациональное, то траекториями точек 3 и 4 будут замкнутые кривые. При K иррациональном кривые будут незамкнутые.

В соответствии с этим преобразованное уравнение подеры (траектория точки 4) принимает вид

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 \frac{\beta + \delta_0 - \varphi}{1 - K} + l_2^2 \sin^2 \frac{\beta + \delta_0 - \varphi}{1 - K}, \quad (8)$$

а преобразованное уравнение эллипса (траектория точки 3) имеет вид уравнения (6), где

$$\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta - \delta_0 - K \operatorname{arctg} \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right). \quad (9)$$

При построении кривых, преобразующих эллипс, функция табулируется по β' , а значения β каждый раз определяем из решения трансцендентного уравнения (9) итеративным методом. В частном случае, при $l_1 = l_2$, из уравнений (6) и (9) получаем уравнение окружности при $K \neq 1$ или точку на окружности при $K = 1$.

Рассмотрим другой случай (рис. 2, б), когда угол между l_1 и l_2 равен $\pi/2 \pm \gamma$, при $\gamma < \pi/2$. Здесь справедливо равенство

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 \alpha + l_2^2 \cos^2 (\alpha \pm \gamma), \quad (10)$$

а соотношение между текущими координатами α и β будет

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\cos \gamma - \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \gamma}. \quad (11)$$

Если φ — угол переноса радиуса-вектора ρ эллипса для построения подеры, то ее уравнение в полярной системе координат

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2(\beta - \varphi) + l_2^2 \cos^2(\beta - \varphi \pm \gamma), \quad (12)$$

а уравнение эллипса в полярной системе имеет вид

$$\rho^2 = \frac{l_1^2 l_2^2 \sin^2 \gamma}{l_2^2 \cos^2 \beta + l_1^2 \sin^2 \beta - l_1 l_2 \cos \gamma \sin 2\beta}, \quad (13)$$

причем, при $\gamma = \mp \pi/2$ получаем уравнение эллипса (6).

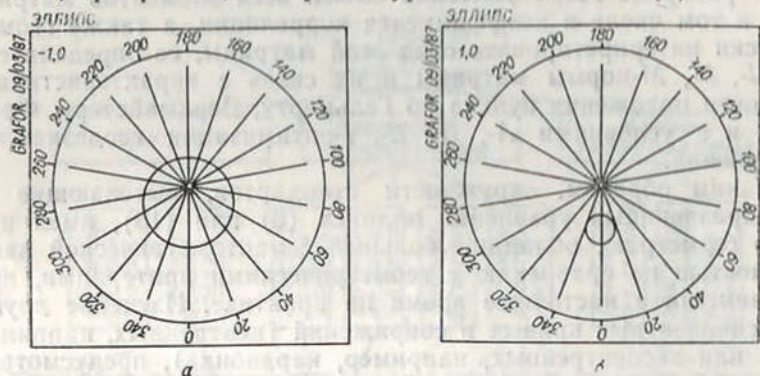


Рис. 3. Окружности стандартов с внутренним (а) и внешним (б) эксцентриситетами, являющиеся преобразованными формами эллипса.

Поставим аналогично рассмотренным выше условия относительно коэффициента преобразования K и начального угла δ_0 . Тогда получим преобразованное уравнение подеры:

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 \frac{\beta + \delta_0 - \varphi}{1 - K} + l_2^2 \cos^2 \left(\frac{\beta + \delta_0 - \varphi}{1 - K} \pm \gamma \right). \quad (14)$$

В свою очередь преобразованное уравнение эллипса сохранит вид уравнения (13), но как и в первом случае

$$\beta' = \pm K \operatorname{arctg} \frac{\cos \gamma - \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \gamma} + \delta_0. \quad (15)$$

Практической реализацией теоретических разработок явилось составление (при участии Г. Л. Шульц) на алгоритмическом языке Фортран с применением графора [1] программы для построения кривых на ЕС ЭВМ. Следует сказать, что при построении кривых на ЕС ЭВМ в полярной системе координат с использованием стандартных программ требуется считать положительным угол поворота радиуса-вектора против хода часовой стрелки. Поэтому уравнения кривых преобразованы в соответствии с требованиями, предъявляемыми графическими подпрограммами из библиотеки графора.

По уравнениям (5)—(15) построены на ЕС ЭВМ 1022 эллипсы, подеры, различные кривые и их сопряжения, в том числе и предложенные нами новые геометрические критерии — окружности стандартов с внутренним (рис. 3, а) и внешним (рис. 3, б) эксцентриситетами. Теоретическое обоснование и прикладное значение новых критериев нашло отражение в [2]. Они, согласно классификации на рис. 1, относятся к эксцентренным круговым геометрическим критериям и, обладая всеми достоинствами эллипса, подеры или круга Моора, позволяют раскрыть геометрический смысл всех элементов матрицы (1), в том числе и коэффициента корреляции, а также геометрически интерпретировать след этой матрицы, ее определитель, m -, l -, k -, M -нормы матрицы и их связь с характеристиками точности положения пункта по Гельмерту, Веркмайстеру, Фридриху и с условиями A -, D -, E -, I -оптимизации геодезических построений.

Таким образом, окружности стандартов, вытекающие из преобразованных уравнений эллипса (6) или (13), имея простую геометрию, обладают большей семантометрической насыщенностью по сравнению с геометрическими критериями, применяемыми в настоящее время на практике. Изучение других трансцендентных кривых и сопряжений (центральных, например, роза или эксцентренных, например, кардиоида), предусмотренных классификацией на рис. 1, являющихся преобразованными формами эллипса и подеры, представляет определенный интерес с точки зрения применения их для анализа маркшейдерско-геодезических построений.

Для характеристики точности положения пункта в трехмерном пространстве (рис. 1) используют в качестве круговых критериев сферу, радиус M которой равен корню квадратному из следа матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y r_{xy} & \sigma_x \sigma_z r_{xz} \\ \sigma_x \sigma_y r_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_y \sigma_z r_{yz} \\ \sigma_x \sigma_z r_{xz} & \sigma_y \sigma_z r_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для такой характеристики точности присущи все перечисленные выше недостатки. Поэтому мы предлагаем в качестве радиуса сферы выбирать величину, вычисляемую по формуле (2), а именно

$$M_k = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2|\sigma_x \sigma_y r_{xy}| + 2|\sigma_x \sigma_z r_{xz}| + 2|\sigma_y \sigma_z r_{yz}|}. \quad (17)$$

Что касается эллипсоида и подероида, то с их помощью сложно геометрически интерпретировать матрицу (16), поэтому на практике ограничиваются лишь аналитическими вычислениями элементов этих критериев. Такая интерпретация возможна по отношению к дисперсиям и кофакторам с помощью кругов Моора. Использование окружностей стандартов позволило нам предложить новую геометрическую интерпретацию матрицы (16). Здесь эллипсоид или подероид заменяем тремя окружностями

стандартов с внешним или внутренним эксцентриситетами, что дает возможность демонстрировать полную геометрическую интерпретацию матрицы (16).

На рис. 4 представлена разработанная нами классификация технических средств геометрической интерпретации. Все они подразделены на три группы — простые, полуавтоматизированные и автоматизированные.

Простые — это технические средства, при помощи которых замкнутый технологический процесс построения геометрических

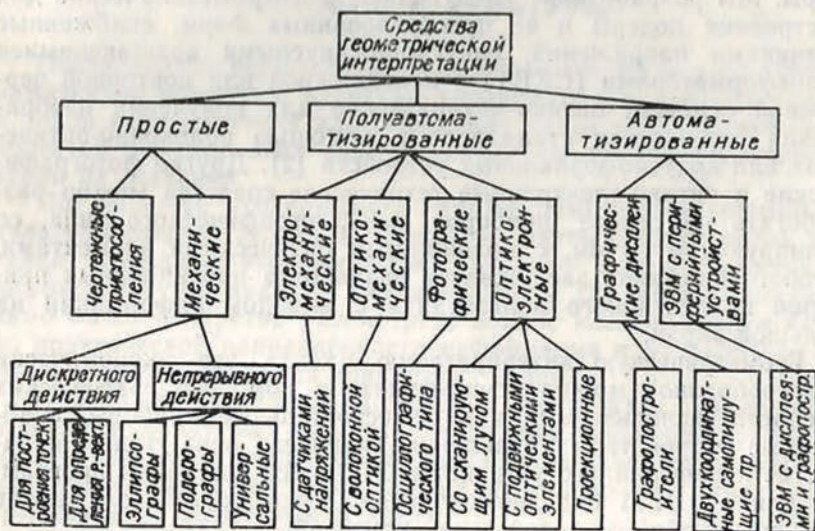


Рис. 4. Классификация технических средств геометрической интерпретации.

критериев и получения по ним необходимой информации осуществляется непосредственно человеком. Автоматизированные технические средства направляют и контролируют осуществление этого процесса по заданным алгоритмам без непосредственного вмешательства человека. Полуавтоматизированные занимают промежуточную позицию. Наши приборные разработки, базируясь на изложенной выше теории преобразованных форм, коснулись всех трех групп.

Первая группа включает обычные чертежные приспособления и механические приборы. Отличительной особенностью разработанных нами механических приборов [2] является наличие поворотного звена с двумя фиксаторами, которые устанавливаются на фиксированных расстояниях l_1 и l_2 от оси его вращения. Фиксаторы связаны с устройствами, которые, при вращении ведущего звена, формируют радиусы-векторы эллипса или подеры. В зависимости от способа регистрации этих радиусов-векторов различают приборы дискретного и непрерывного действия.

Приборы дискретного действия предназначены для построения отдельных точек кривых или для определения радиусов-векторов и других числовых характеристик геометрических критериев.

Приборы непрерывного действия позволяют непосредственно вычерчивать заданные геометрические критерии — эллипс (эллипсографы), подеру (подерографы), преобразованные формы эллипса и подеры (универсальные приборы).

К группе полуавтоматизированных относятся электро- и оптико-механические, фотографические и оптико-электронные приборы. Мы разработали следующие: электромеханические для построения подеры и ее преобразованных форм, снабженные датчиками напряжений, синусно-косинусными вращающимися трансформаторами (СКВТ) с неподвижной или повторной чертежной основой; оптико-механические для получения изображения окружности стандартов с помощью волоконно-оптических или конусно-зеркальных устройств [2]. Другие фотографические и оптико-электронные технические средства можно разработать на основе приборов осциллографического типа, со сканирующим лучом, с подвижными оптическими элементами. Особого внимания заслуживает разработка проекционных приборов коллективного пользования с выводом информации на большой экран.

Геометрическую интерпретацию (когда это экономически целесообразно) можно осуществлять с помощью графических дисплеев, используемых как самостоятельные приборы, снабженные устройством управления пишущего пера, так и в качестве периферийного устройства ЭВМ. Мы составили программу для ЕС ЭВМ 1022, по которой на графопостроителе можно получить любой геометрический критерий.

Также разработана программа для построения по значениям I_1 , I_2 и γ подеры и окружности стандартов с отображением их на экране телевизора ЭВМ БК 0010. В МИИГАиКе составлена программа для микроЭВМ «Искра 1256», позволяющая выполнять на основе матрицы обратных весов сети необходимые вычисления элементов подеры отдельного пункта и рисовку кривой на графопостроителе Н306.

Для решения локальных задач перевода информации ЭВМ на язык графических образов, перспективна разработка простых периферийных устройств микроЭВМ. К ним можно отнести предложенные нами конструкции приборов с кодовым диском, с СКВТ, с поворотной чертежной основой, снабженные программным устройством, которые позволяют по одному и тому же алгоритму теории преобразованных форм получать различные геометрические критерии.

1. Баяковский Ю. М., Галактионов В. А., Михайлова Т. Н. Графор. Графическое расширение Фортрана. М., 1985. 2. Шеховцов Г. А. Критерии и средства геометрической интерпретации погрешности положения точек на плоскости. — Горький, 1987. — С. 198. — Рукопись деп. в ВИНТИ. № 192—В87.