УДК 528.235

Г. А. ШЕХОВЦОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОКРУЖНОСТИ СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАРКШЕЙДЕРСКО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Окружности средних квадратических отклонений (*о. с. к. о.*) с внутренним (*внт*) [1] или внешним (*внш*) [3] эксцентриситетами предназначены для характеристики точности положения отдельных пунктов сети (абсолютные *о. с. к. о.*) или для оценки точности взаимного расположения пунктов (относительные *о. с. к. о.*). Элементами таких окружностей являются линейные и угловые величины, по которым их можно построить и ориентировать относительно координатных осей. Решение поставленной задачи применительно к однократным засечкам описано в [2]. В статье предлагаем наиболее рациональные способы определения элементов *о. с. к. о.* и их построения при наличии избыточных измерений.

Отметим, что априорную оценку точности определения положения геодезических пунктов осуществляют с использованием значений углов (β, α) и длин сторон (s), снятых со схемы сети. По этим данным вначале составляют матрицу A коэффициентов a и b исходных уравнений ошибок. Находят матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений $N=A^{\mathrm{T}}A$, а затем матрицу весовых коэффициентов $Q=N^{-1}$. Ковариационную матрицу $K=\mu^2Q$ получают умножением обратной матрицы на дисперсию единицы веса. Однако матрица K является лишь средством хранения в цифровой форме данных, которые служат источником получения различных скалярных оценок. В свою очередь, все скалярные оценки являются геометрической интерпретацией ковариационной матрицы, представляя собой различные элементы окружностей *с. к. о. внт* или *внш*.

В вычислениях коэффициентов a и b могут принимать участие градиенты направлений g_i, углов g_j' и расстояний. Градиенты направлений вычисляют по формуле $g_i=\rho/s_i$, градиенты расстояний равны единице. Значение и направление градиентов углов интерпретируют инверсионные фигуры (рис. 1, *а, б*). При вставке одиночного пункта можно брать в качестве дирекционных углов градиентов их прямые или обратные значения, что не влияет на результаты оценки точности. При совместном определении нескольких пунктов это недопустимо. Поэтому при определении дирекционных углов градиентов следует придерживаться правил.

1. Если (рис. 1, *а*) угол измерен на исходном пункте T_i, то в качестве g_i следует брать градиент направления, дирекционный угол которого соответствует направлению из этого исход-

ного пункта на определяемый, если оно является правым по отношению к исходной стороне. Так, при измерении углов β_2, β_3 и β_4 направления $T_2—P$, $T_3—P$ и $T_4—P$ являются правыми по отношению к $T_2—T_1$, $T_3—T_2$ и $T_4—T_3$, поэтому градиенты g_2, g_3 и g_4 имеют дирекционные углы α_{T_2-P}, α_{T_3-P} и α_{T_4-P}.

Если направление на определяемый пункт является левым, то его градиент направлен от определяемого пункта к исходному. Действительно, при измерении углов β_1, β_2' и β_3' направления

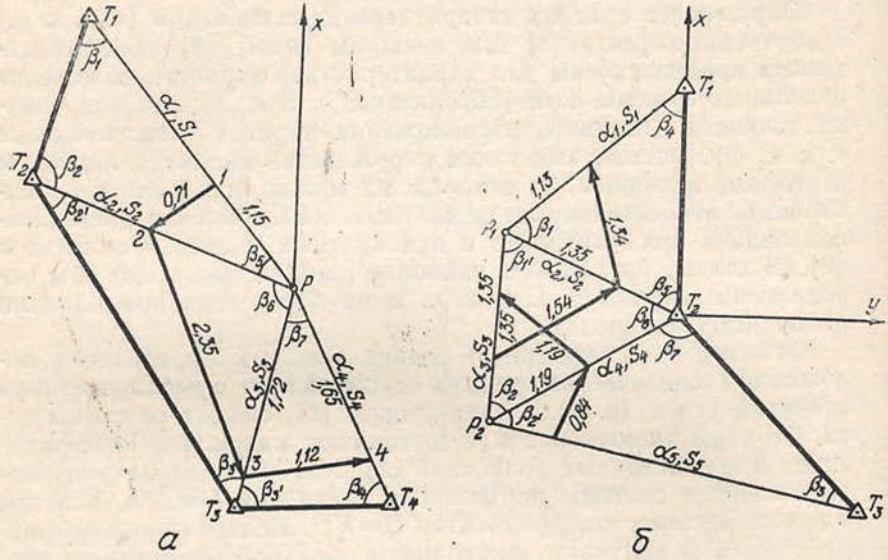

Рис. 1. Схемы сети и инверсионные фигуры.

$T_1—P$, $T_2—P$ и $T_3—P$ левые относительно $T_1—T_2$, $T_2—T_3$ и $T_3—P_4$, следовательно, дирекционные углы градиентов направлений g_1, g_2' и g_3' равны соответственно α_{P-T_1}, α_{P-T_2} и α_{P-T_3}.

2. Если (рис. 1, *а*) угол измерен на определяемом пункте P, то в качестве g_j' берут градиент этого угла. Направление градиента выбирают в сторону того направления, от которого угол измеряется. В нашем примере углы β_5, β_6 и β_7 измеряются от направлений $P—T_2$, $P—T_3$ и $P—T_4$, поэтому дирекционные углы градиентов g_5', g_6' и g_7' равны α_{1-2}, α_{2-3} и α_{3-4}. Такое правило справедливо, если при построении инверсионной фигуры градиенты направлений откладывать в сторону исходных пунктов.

3. Если измерены непосредственно дирекционные углы сторон α_i, то в качестве g_i необходимо брать градиенты направлений. Дирекционные углы этих градиентов равны дирекционным углам сторон $T_i—P$.

4. Если непосредственно измерены длины сторон S_K, то в качестве градиентов принимается единица, а дирекционные углы градиентов равны дирекционным углам сторон, имеющих направление от исходного пункта на определяемый.

В случае угловых измерений $a_i = -g_i \sin \alpha_i$, $b_i = g_i \cos \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) или $a_j = -g_j' \sin \alpha_j$, $b_j = g_j' \cos \alpha_j$ ($j = 1, 2, \ldots, t$), а при линейных измерениях $a_K = \cos \alpha_K$, $b_K = \sin \alpha_K$ ($K = 1, 2, \ldots, l$). Для линейно-угловых измерений вначале необходимо установить веса угловых $P_{\beta,\alpha}$ и линейных P_S измерений. Если принять $P_S = 1$, то $P_{\beta,\alpha} = \mu^2 : m_{\beta,\alpha}^2$. В соответствии с этим коэффициенты a_K и b_K, относящиеся к линейным измерениям, останутся без изменения, а коэффициенты $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$, относящиеся к угловым измерениям, необходимо умножить на $\sqrt{P_{\beta,\alpha}}$. Если в линейно-угловых измерениях принять $P_{\beta,\alpha} = 1$, тогда $P_S = \mu^2 : m_S^2$, и умножать на $\sqrt{P_S}$ следует коэффициенты a_K и b_K, относящиеся к линейным измерениям. Здесь $m_{\beta,\alpha,S}$ — средние квадратические ошибки измерения углов и длин сторон.

Матрица A при определении одиночного пункта имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

в которой количество строк соответствует числу измеренных величин. В таблице в качестве примера приведена характеристика сети (см. рис. 1, *а*) и получены матрицы A для прямой угловой засечки, азимутальной, обратной угловой и линейной засечек.

Матрица N для приведенных в таблице засечек и равноточном измерении углов или длин сторон имеет вид

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix},$$

где A^T — транспонированная по отношению к A матрица.

Комбинированная засечка на рис. 1, *а* — это комбинация прямой угловой и обратной угловой засечек (таблица). Здесь матрицу N_K можно получить двумя путями. Во-первых, если коэффициенты a и b прямой угловой засечки дополнить соответствующими коэффициентами обратной угловой, то получим матрицу A комбинированной засечки, по которой вычислим матрицу N_K. Во-вторых, если известны матрицы $N_у$ и $N_{об}$ прямой и обратной угловой засечек, то матрицу N_K комбинированной засечки можно представить как сумму $N_K = N_у + N_{об}$.

Линейно-угловая засечка представляет собой комбинацию, например, прямой угловой и линейной засечек (таблица). Матрица $N_{л-у}$ такой засечки также может быть получена двояко. Первый путь заключается в составлении матрицы A из коэффициентов a и b для угловых и линейных измерений по изложенным выше правилам их определения. Второй путь предусматривает наличие матриц $N_у$ и $N_л$ угловой и линейной засечек. По ним можно вычислить матрицу $N_{л-у} = N_л + P_{\alpha,\beta} N_у$ (при $P_S = 1$) или $N_{л-у} = P_S N_л + N_у$ (при $P_{\beta,\alpha} = 1$).

В случае определения одиночного пункта матрица N достаточна для вычисления элементов *о. с. к. о.* Так, радиус R и эксцентриситет *е о. с. к. о. внт* получим по формуле

$$R^2,\ e^2 = \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{[aa]+[bb]\pm 2\sqrt{[aa][bb]-[ab]^2}}{[aa][bb]-[ab]^2}\right). \qquad (1)$$

Для *о. с. к. о. внш* в формуле (1) необходимо перед радикалом поменять местами знаки.

Для ориентирования *о. с. к. о. внт* и *внш* относительно координатных осей необходимо в данном случае найти

$$2\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{-2[ab]}{[bb]-[aa]}, \qquad (2)$$

Характеристика сети, градиенты и их дирекционные углы, коэффициенты

Измеренные углы, расстояния	Направления	S, м	$g\frac{\ldots''}{см}$	α, °	a	b
			Прямая угловая засечка			
β_1	$P—T_1$	1800	1,15	321	0,7237	0,8937
β_2	$T_2—P$	1500	1,38	111	—1,2883	—0,4945
β_2'	$P—T_2$	1500	1,38	291	1,2883	0,4945
β_3	$T_3—P$	1200	1,72	13	—0,3869	1,6759
β_3'	$P—T_3$	1200	1,72	193	0,3869	—1,6759
β_4	$T_4—P$	1250	1,65	334	0,7233	1,4830
			Азимутальная засечка			
α_1	$T_1—P$	1800	1,15	141	—0,7237	—0,8937
α_2	$T_2—P$	1500	1,38	111	—1,2883	—0,4945
α_3	$T_3—P$	1200	1,72	13	—0,3869	1,6759
α_4	$T_4—P$	1250	1,65	334	0,7233	1,4830
			Обратная угловая засечка			
β_5	—	—	0,71	235	0,5816	—0,4072
β_6	—	—	2,35	157	—0,9182	—2,1632
β_7	—	—	1,12	80	—1,1030	0,1945
			Линейная засечка			
S_1	$T_1—P$	1800	1	141	—0,7771	0,6293
S_2	$T_2—P$	1500	1	111	—0,3584	0,9336
S_3	$T_3—P$	1200	1	13	0,9744	0,2250
S_4	$T_4—P$	1250	1	334	0,8988	—0,4384

придерживаясь правил, аналогичных правилам вычисления дирекционных углов по величине и названию румбов.

По значениям R, e строим *о. с. к. о. внт* и *внш* (рис. 2, *а*, *б*) следующим образом. От произвольной точки O откладываем отрезок $OO_1=e$ и из O_1, как из центра, проводим искомую окружность радиусом R. От направления OO_3 откладываем $2\varphi_0$, находим направление оси x, противоположное направление будет y. Эти окружности являются полной геометрической интерпретацией ковариационной матрицы K ошибок координат пункта P. Действительно, отрезки OO_3 и OO_2 характеризуют величины, равные корню квадратному из собственных значений матрицы K; σ_x и σ_y — корни квадратные из дисперсий на главной диагонали матрицы; синус угла (1-O-2) равен коэффициенту корреляции r_{xy}; удвоенная площадь треугольника 1-O-2 соот-

ветствует кофактору $\sigma_x\sigma_y r_{xy}$ на побочной диагонали матрицы k и т. д.

Если вычислить матрицу весовых коэффициентов

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix},$$

то имеем возможность найти угол 1—O—2 (рис. 2, *а, б*). Для этого, обозначив $r_{xy} = \cos\beta$, запишем $\beta = 90° - \arcsin\cos\beta$, откуда $(1—O—2) = 90° + \beta = 180° - \arcsin\cos\beta$ или $(1—O—2) = 90° -$

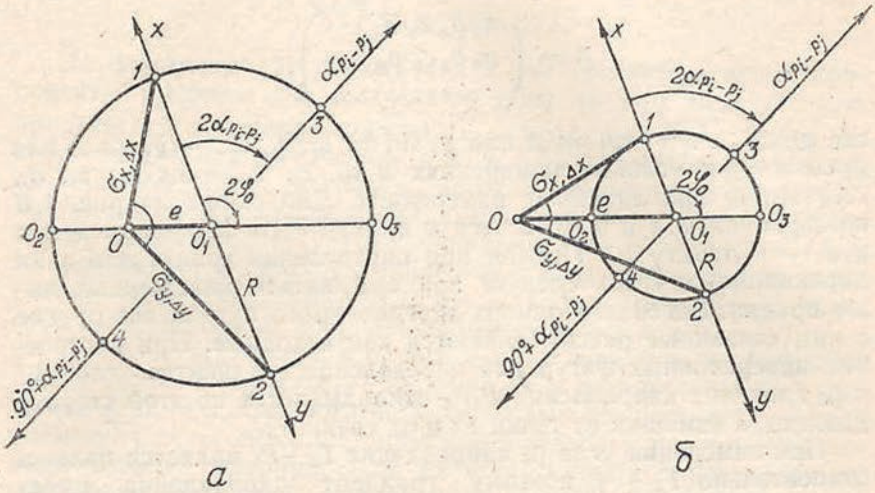

Рис. 2. Построение окружностей *с. к. о. внт* (*а*) *и внш* (*б*).

$-\beta = 360° + \arcsin\cos\beta$. Поэтому, выражая r_{xy} через компоненты матрицы Q, получаем

$$(1-0-2) = 180^0 - \arcsin\frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx}\,Q_{yy}}},$$

$$(1-0-2) = 360^0 + \arcsin\frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx}\,Q_{yy}}}, \qquad (3)$$

где первая формула относится к *о. с. к. о. внт*, а вторая — к *о. с. к. о. внш*.

Теперь достаточно (рис. 2, *а, б*) отложить на сторонах угла (1—O—2) значения $\sigma_x = \mu\sqrt{Q_{xx}}$ и $\sigma_y = \mu\sqrt{Q_{yy}}$, найти центр O_1 и провести *о. с. к. о. внт* или *внш*, причем сразу ориентированные относительно координатных осей. В этом случае точка O находится слева от оси x (левый эксцентриситет), если угол (1—O—2) $< 180°$ (рис. 2, *а*) или $< 90°$ (рис. 2, *б*). При угле (1—O—2) $> 180°$ (рис. 2, *а*) или $> 270°$ (рис. 2, *б*) точка O располагается справа от оси x (правый эксцентриситет).

По матрице Q также можно вычислить радиус и эксцентриситет *о. с. к. о. внт*

$$R^2, e^2 = \frac{\mu^2}{4}\left(Q_{xx} + Q_{yy} \pm 2\sqrt{Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2}\right), \qquad (4)$$

а для *о. с. к. о. внш* необходимо поменять знаки перед радикалом.

При совместном определении нескольких пунктов (рис. 1, *б*) вначале составляют матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} a_1\, b_1\, c_1\, d_1 \cdots \\ a_2\, b_2\, c_2\, d_2 \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},$$

где $a_i, c_i, \ldots = -g_i \sin\alpha_i$ или $g_j' \sin\alpha_j$; $b_i, d_i, \ldots = g_i \cos\alpha_i$ или $g_j' \cos\alpha_j$ при угловых измерениях и $a_i, c_i, \ldots = \cos\alpha_K$; $b_i, d_i, \ldots = \sin\alpha_K$ при линейных измерениях. Для схемы на рис. 1, *б* коэффициенты a и b относятся к пункту P_1, а коэффициенты c и d — к пункту P_2. Причем при определении градиентов и их дирекционных углов следует придерживаться изложенных выше правил. Здесь для одного определяемого пункта все другие с ним связанные рассматриваются как исходные. При построении инверсионных фигур для определения градиентов углов β_1' и β_2 градиент направления P_1P_2 откладывается по этой стороне дважды, а изменно: от точки P_1 и от точки P_2.

При измерении угла β_6 направление T_2—P_1 является правым относительно T_2—P_2, поэтому градиент направления имеет $\alpha_{T_2-P_1}$ для пункта P_1. Направление T_2—P_2 является левым относительно T_2—P_1, тогда дирекционный угол градиента направления для пункта P_2 будет $\alpha_{P_2-T_2}$.

При измерении углов β_1' и β_2 направление P_1—P_2 является правым относительно P_1—T_2, а P_2—P_1 — левым относительно P_2—T_2, поэтому дирекционный угол градиента этого направления как для P_1, так и для P_2 будет один и тот же $\alpha_{P_1-P_2}$.

В азимутальной сети используют только градиенты направлений. Их дирекционные углы соответствуют направлениям от исходного пункта к определяемому. Для пункта P_1 это направления T_1—P_1, T_2—P_1 и P_2—P_1, а для пункта P_2 — направления P_1—P_2, T_2—P_2 и T_3—P_2. Аналогичным образом выбирают дирекционные углы градиентов в трилатерационной сети. Принцип формирования матрицы A линейно-угловой сети изложен выше.

Вычислив матрицу N, затем матрицу Q и выделив в ней блоки

$$a_{11} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} \\ Q_{x_1y_1} & Q_{y_1y_1} \end{pmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{x_2x_2} & Q_{x_2y_2} \\ Q_{x_2y_2} & Q_{y_2y_2} \end{pmatrix}, \ldots,$$

находим по формулам (3) углы $(1\text{-}O\text{-}2)_1$, $(1\text{-}O\text{-}2)_2$, ... и *с. к. о.* $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}, \ldots$, относящиеся к пунктам $P_1, P_2, \ldots$ сети. Этих

данных достаточно для построения (см. рис. 2, *а*, *б*) абсолютных *о. с. к.о. внт* или *внш* для отдельных пунктов сети.

Для вычисления элементов относительной *о. с. к. о.*, характеризующей точность взаимного расположения пунктов P_i и P_j сети, выделяют в общей матрице Q блок Q_{ij} размерностью 4×4, который выражает совокупные ошибки этих пунктов. Вычисляют матрицу Q_F обратных весов приращений координат $\Delta x = x_j - x_i$, $\Delta y = y_j - y_i$, а именно:

$$Q_F = \begin{pmatrix} Q_{\Delta x\Delta x} & Q_{\Delta x\Delta y} \\ Q_{\Delta x\Delta y} & Q_{\Delta y\Delta y} \end{pmatrix}.$$

По формулам (3), подставляя в них соответствующие компоненты матрицы Q_F, вычисляют углы (1-*O*-2) между *с. к. о.* приращений координат $\sigma_{\Delta x} = \mu\sqrt{Q_{\Delta x\Delta x}}$ и $\sigma_{\Delta y} = \mu\sqrt{Q_{\Delta y\Delta y}}$. Этого достаточно для построения (см. рис. 2, *а*, *б*) относительных *о.с.к.о. внт* или *внш*. Если, например, провести диаметры этих окружностей под углом $2\alpha_{Pi-Pj}$ к направлению x, то отрезок *O*-3 будет *с. к. о.* длины стороны между пунктами P_i и P_j, а *O*-4 — *с.к.о.* по перпендикулярному направлению, позволяющее судить о погрешности дирекционного угла α_{Pi-Pj}. Синус угла (3-*O*-4) является коэффициентом корреляции между этими *с. к. о.*

Таким образом, *о. с. к. о. внт* и *внш* являются в настоящее время наиболее простыми, доступными и информативными геометрическими критериями, позволяющими осуществлять полную геометрическую интерпретацию компонентов и инвариантов ковариационной матрицы. Для их построения и ориентирования достаточно вычислить только угол между соответствующими *с. к. о.*, дисперсии которых расположены на главной диагонали этой матрицы.

1. *Шеховцов Г. А.* Новый способ определения элементов эллипса погрешностей и его подеры / Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 42. С. 103—109. 2. *Шеховцов Г. А.* Оценка точности засечек с помощью окружности стандартов // Геодезия и картография. 1985. № 8. С. 45—47. 3. *Шеховцов Г. А.* Окружность стандартов с внешним эксцентриситетом // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1988. Вып. 48. С. 110—116.

Статья поступила в редколлегию 31. 03. 90