

*Л. К. ВОЙСЛАВСКИЙ*

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЬЕФА С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ТОЧЕК**

Одной из главных задач, решаемых при топографической съемке местности, является моделирование рельефа. Согласно [8], моделирование рельефа включает в себя два существенных момента, — первый, — вполне определенная система выбора основных (исходных) точек, с заданной степенью точности определяющих данную в натуре топографическую поверхность, и другой — вполне определенный метод нахождения всех точек этой поверхности на основе исходных.

Следовательно, моделирование рельефа включает два взаимосвязанных и взаимодополняющих процесса:

а) дискретизацию поверхности, т. е. выделение из бесконечного множества точек такого их конечного подмножества, которое наиболее полно и с требуемой точностью представляло бы данную поверхность при решении конкретных задач практики;

б) континуализацию — пластическое (макет), графическое (горизонталь) или математическое (цифровая модель) восстановление непрерывной поверхности на основе конечного дискретного множества точек.

Таким образом, цифровое моделирование рельефа — непрерывно-дискретное преобразование, имеющее своей целью переход от непрерывной функции двух пространственных координат  $H'(x, y)$  к ее дискретному представлению, а также от дискретного представления к непрерывной функции [5]. При этом дискретизации соответствует операция взвешенного интегрирования, а континуализации — операция взвешенного расширения

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^n p(x_k, y_k) H_k, \quad (1)$$

где  $H_k$  — высоты дискретного подмножества точек;  $p(x_k, y_k)$  — весовая функция;  $H(x, y)$  — поверхность, восстановленная по модели.

Для взвешенного расширения объективно существует множество весовых функций  $p(x, y)$ . Подстановка каждой такой функции в (1) даст нам свой, отличный от других, способ восстановления моделируемой поверхности в виде интерполяционных формул и алгоритмов [1, 6, 10].

Один из возможных способов восстановления поверхности — дифференциальная цифровая модель рельефа (ЦМР) [2]. Она предполагает размещение опорных точек в вершинах сетки квадратов. Цель данной работы — распространить дифференциальную ЦМР и на тот случай, когда опорные точки расположены в узлах нерегулярной сетки, согласованной с рельефом местности.

Предположим, что поверхность задана массивом координат  $(x, y, H)$ , характерных и для других точек, обеспечивающих необходимую точность, полноту и детальность изображения рельефа, и массивами граничных и структурных линий или массивами реберной структуры данных для однозначного представления моделируемой поверхности в виде системы непересекающихся треугольников [3, 7]. Стороны треугольников — характерные или иные линии рельефа, допускающие линейную интерполяцию высот между концевыми точками.

Мгновенные значения уклонов по осям координат в любой вершине сети и уклоны сторон треугольников, сходящихся в этой же вершине, связаны уравнением [4]

$$i(x)_k \cos \alpha_l + i(y)_k \sin \alpha_l - i(\alpha)_l = v_l, \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$



где  $i(x)_k, i(y)_k$  — мгновенные значения уклонов по осям  $x, y$  в точке  $k$ ;  $a_l$  — дирекционный угол стороны  $l$ ;  $i(a)_l$  — уклон этой линии;  $v_l$  — поправка к уклону;  $n$  — число связей в данной точке.

Так как количество связей в расчете на один узел при достаточно больших размерах участка составляет в среднем пять-шесть, т. е. число уравнений больше числа неизвестных, система уравнений (2) избыточна. Решив эту систему спосо-

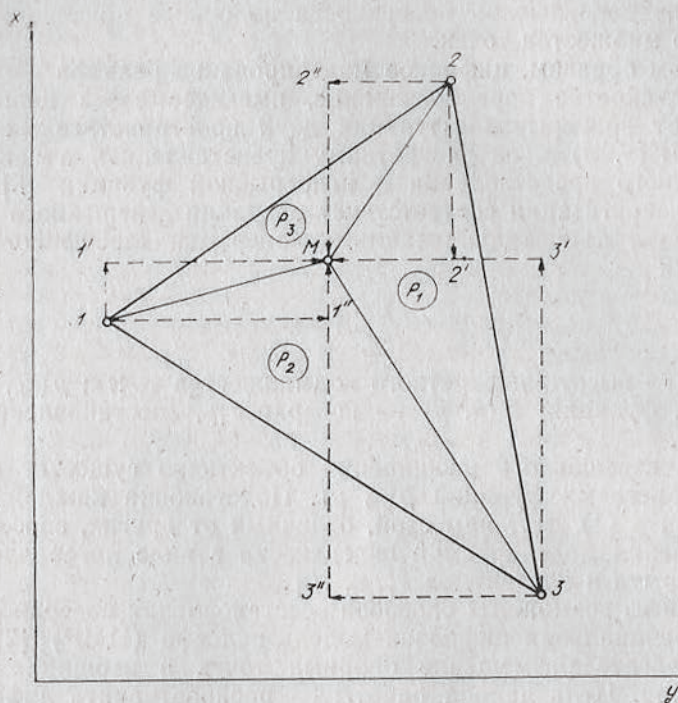


Схема интерполяции высот.

бом наименьших квадратов, найдем приближенные значения  $i(x)_k, i(y)_k$ .

Если точка  $k$  — вершина, дно котловины или седловина, то

$$i(x)_k = 0, \quad i(y)_k = 0 \quad (3)$$

независимо от того, какие значения получены из решения системы (2).

Чтобы выделить эти точки на модели, достаточно во всех внутренних вершинах вычислить дискретную функцию

$$S = \sum_1^n S_l,$$

где

$$S_l = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{sign} [i(\alpha)_l] = \text{sign} [i(\alpha)_{l+1}], \\ 1, & \text{если } \text{sign} [i(\alpha)_l] \neq \text{sign} [i(\alpha)_{l+1}]. \end{cases}$$

$\text{sign } x = \frac{x}{|x|}$  — знаковая функция, ( $l = 1, 2, \dots, n$ ).

При  $S=0$  точка  $k$  — вершина или дно котловины, а при  $S=4$  — седловина.

Мгновенные значения уклонов  $i(x)$ ,  $i(y)$  в произвольной точке  $M(x, y)$ , расположенной внутри треугольника (см. рисунок), можно определить билинейной интерполяцией. Для этого величины  $i(x)_k$ ,  $i(y)_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) умножим на весовые коэффициенты [9]:

$$p_k = \frac{1}{2F} [x(y_{k+1} - y_{k-1}) + y(x_{k-1} - x_{k+1}) + \det Z_k,$$

где

$$Z_k = \begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_{k-1} & y_{k-1} \end{vmatrix}; \quad (4)$$

$F$  — площадь треугольника 123;  $\det Z_k$  — определитель матрицы  $Z_k$ ;  $k = \dots, 3, 1, 2, 3, \dots$  — циклический индекс. Полученные произведения просуммируем. В результате получим

$$i(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad i(y) = b_1 + b_2 x + b_3 y, \quad (5)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(x)_k \det Z_k; \quad a_2 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(x)_k (y_{k+1} - y_{k-1});$$

$$a_3 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(x)_k (x_{k-1} - x_{k+1}); \quad b_1 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(y)_k \det Z_k;$$

$$b_2 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(y)_k (y_{k+1} - y_{k-1}); \quad b_3 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 i(y)_k (x_{k-1} - x_{k+1}).$$

Весовой коэффициент  $p_k$  — отношение площади треугольника, составленного точкой  $M$  с вершинами  $k-1$  и  $k+1$ , к площади треугольника 123. Сумма коэффициентов  $p_k$  равна единице.

Рассмотрим восстановление моделируемой поверхности путем решения прямой и обратной интерполяционной задачи с использованием уравнений уклонов (5).



Прямая интерполяционная задача (определение высоты в заданной точке). Высоту точки  $M$  относительно исходных точек 1, 2, 3 можно определить из выражений [2]

$$H_M = H_k + \int_{x_k}^{x_M} i(x) dx + \int_{y_k}^{y_M} i(y) dy, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Интеграл в (6), принимая во внимание (5), зависит от пути интегрирования. Возникшее затруднение можно устранить, если интегрирование по  $x$  и  $y$  выполнить дважды, т. е. по линиям  $11'$ ,  $1'M$  и  $11''$ ,  $1''M$  от точки 1, по линиям  $22'$ ,  $2'M$  и  $22''$ ,  $2''M$  от точки 2, по линиям  $33'$ ,  $3'M$  и  $33''$ ,  $3''M$  от точки 3 (см. рисунок), а затем найти средние значения. В результате получим

$$H_M = H_k + (x_M - x_k) \left[ a_1 + a_2 \frac{(x_M + x_k)}{2} + a_3 \frac{(y_M + y_k)}{2} \right] + (y_M - y_k) \left[ b_1 + b_2 \frac{(x_M + x_k)}{2} + b_3 \frac{(y_M + y_k)}{2} \right] \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Как уже отмечалось, уклоны  $i(x)_k$ ,  $i(y)_k$  — величины приближенные. Следовательно, приближенными являются значения коэффициентов в уравнениях (5). Поэтому каждое из трех выражений (7) дает нам свое, отличное от других значение высоты точки  $M$ .

Оптимальным решением в данных условиях будет средневзвешенное значение. Умножим высоты (7) на весовые коэффициенты (4). Полученные произведения просуммируем. Выполняя необходимые алгебраические преобразования, имеем

$$H_M = c_0 + c_1 x_M + c_2 y_M + c_3 x_M y_M + c_4 x_M^2 + c_5 y_M^2, \quad (8)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 (H_k - E_k) \det Z_k; \quad c_1 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 (H_k - E_k) (y_{k+1} - y_{k-1})$$

$$c_2 = \frac{1}{2F} \sum_1^3 (H_k - E_k) (x_{k-1} - x_{k+1}); \quad c_3 = \frac{1}{2} (a_3 + b_2),$$

$$c_4 = \frac{a_2}{2}, \quad c_5 = \frac{b_3}{2}; \quad E_k = \frac{a_2 x_k^2 + (a_3 + b_2) x_k y_k + b_3 y_k^2}{2}.$$

Если, не меняя направления осей, переместить начало координат в точку  $M$ , т. е. принять  $\dot{x}_M = \dot{0}$ ,  $\dot{y}_M = 0$ , выражение (8) значительно упрощается:

$$H_M = \frac{1}{2F} \sum_1^3 (H_k - \dot{E}_k) \det \dot{Z}_k, \quad (9)$$

где  $\hat{E}_k, \hat{Z}_k$  определяются по координатам  $\hat{x}_k, \hat{y}_k$  ( $k=1, 2, 3$ ), исчисленным от точки  $M$ .

В случае, когда точка  $M$  располагается на одной из сторон треугольника 123, например на стороне 1—2, интерполяционная формула принимает вид

$$H_M = \frac{H_2 - H_1}{d_{12}} d_{1M} - a d_{1M} (d_{12} - d_{1M}), \quad (10)$$

где  $d_{12}, d_{1M}$  — длины линий 1—2 и 1— $M$ ;

$$a = \frac{i(\alpha_{12})_2 - i(\alpha_{12})_1}{2d_{12}}.$$

**Обратная интерполяционная задача (определение точки с заданной высотой).** Данная задача имеет однозначное решение только тогда, когда фиксирована одна координата, т. е. при заданной ординате определяем абсциссу, или наоборот.

На основании выражения (8) получим два квадратных уравнения:

$$A_1 x^2 + B_1 x + c_1 = 0, \quad (y = \text{const}); \quad (11)$$

$$A_2 y^2 + B_2 y + c_2 = 0, \quad (x = \text{const}), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1; & A_2 &= c_5; \\ B_1 &= c_1 + c_3 y; & B_2 &= c_2 + c_3 x; \\ c_1 &= c_0 + c_2 y + c_5 y^2 - H; & c_2 &= c_0 + c_1 x + c_4 x^2 - H. \end{aligned}$$

Здесь  $H$  — заданная высота.

Решением задачи будет действительный корень уравнения (11) или (12), обеспечивающий расположение определяемой точки в заданном треугольнике.

Искомая точка  $w(x, y)$  находится в данном треугольнике тогда и только тогда, когда для всех его вершин имеет место неравенство

$$\begin{aligned} x(y_{k+1} - y_{k-1}) + y(x_{k-1} - x_{k+1}) + \det Z_k &\geq 0, \\ (k = \dots 3, 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы интерполяция была эффективной, ее направление должно быть достаточно близким к линии наибольшей крутизны ската. Дифференцируя (8) по переменным  $x$  и  $y$ , находим уточненные значения уклонов по осям координат [2]:

$$\tilde{i}(x) = \frac{\partial H}{\partial x} = c_1 + c_3 y + 2c_4 x; \quad \tilde{i}(y) = \frac{\partial H}{\partial y} = c_2 + c_3 x + 2c_5 y. \quad (14)$$

Затем определяем косинус дирекционного угла  $\theta$  линии наибольшей крутизны ската

$$\cos \theta = \frac{\tilde{i}(x)}{i_{\max}},$$



где  $i_{\max} = \sqrt{\tilde{i}^2(x) + \tilde{i}^2(y)}$  — уклон линии наибольшей крутизны.

Если

$$|\cos \theta| \geq \sqrt{2}/2, \quad (15)$$

точку с заданной высотой находим решением уравнения (11). В остальных случаях предпочтительнее уравнение (12).

В случае, когда у одной из вершин выражение (13) равно нулю, определяемая точка располагается на стороне, противолежащей этой вершине. Чтобы определить ее положение, например на линии 1—2, преобразовав (10), получим

$$ad^2 + bd + c = 0, \quad (16)$$

где

$$b = \frac{H_2 - H_1}{d_{12}} - \frac{1}{2} [i(\alpha_{12})_2 - i(\alpha_{12})_1]; \quad c = H_1 - H.$$

Решением задачи будет действительный положительный корень уравнения (14), меньший, чем  $d_{12}$ .

На основании выражений (11)—(16) можно составить алгоритм отслеживания горизонталей при помощи ЭВМ, которое сводится, по сути дела, к формированию последовательности координат точек, имеющих заданную высоту [1].

Итак, мы решили задачу аппроксимации моделируемой поверхности по высотам отдельных ее точек с учетом мгновенных значений уклонов в заданных точках. Это дает возможность при том же объеме исходной информации более точно восстановить моделируемую поверхность, чем, например, методом линейной или билинейной интерполяции. Некоторое усложнение вычислительного процесса по сравнению с названными методами, принимая во внимание возможности современных ЭВМ, существенной роли не играет. Важное преимущество дифференциальной ЦМР — полное совпадение в исходных точках поверхности, восстановленной по модели, с первичной, т. е. фактически существующей, поверхностью.

Предлагаемый метод аппроксимации можно применить не только для моделирования рельефа, но и для моделирования других поверхностей, обладающих свойствами топографической поверхности [8].

1. Бойко А. В. Методы и средства автоматизации топографических съемок. М., 1980.
2. Войславский Л. К. Дифференциальная цифровая модель рельефа // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 10—19.
3. Гинзбург В. И. Модель рельефа для проектирования и составления планов // Геодезия и картография. 1977. № 4. С. 50—55.
4. Емельянов О. Г. Определение углов наклона дна по цифровой модели рельефа // Геодезия и картография. 1984. № 11. С. 37—40.
5. Игнатъев Н. К. Дискретизация и ее приложения. М., 1980.
6. Коновалов Н. Е. Цифровое моделирование условий местности для проектирования линейных сооружений // Тр. ГипродорНИИ. 1974. Вып. 8. С. 21—33.
7. Неумыва

кин А. Ю., Яковлев А. Ф. О построении структурно-цифровой модели рельефа // Геодезия и картография. 1986. № 2. С. 34—38. 8. Соболевский П. К. Современная горная геометрия // Социалистическая реконструкция и наука. 1932. № 7. С. 42—78. 9. *Gazdzicki J.* Informatyka w geodezji i kartografii. Warszawa, 1975. 10. *Schut G. H.* Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models // *The Canadian surveyor.* 1976. V. 30. S. 389—412.

Статья поступила в редколлегию 08.12.87