УДК 528.3

Л. С. ХИЖАК

УЧЕТ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КООРДИНАТ ТОЧЕК СВЕТОВОЙ КРИВОЙ

Для определения уравнения световой кривой в литературе обычно рассматривают решение задачи, когда показатель преломления не зависит непосредственно от абсциссы, т. е. когда уравнение Эйлера для плоского случая можно представить в виде

$$nz''=n_z'(1+z'^2). \tag{1}$$

Здесь n и n_z' — показатель преломления и его производная по z; z' — производная по x от уравнения световой кривой. Однако и решение (1) зависимости n от z в общем виде невозможно. Поэтому в литературе решение данного уравнения описывается в виде ряда Тейлора

$$z=z_0'x+\frac{z''}{2}x^2+\cdots, \tag{2}$$

где z_0' и z_0'' — соответственно первая и вторая производные, вычисленные в начале координат.

Решение (2) было бы строгим, если бы ряд (2) являлся сходящимся. Как показали специальные исследования, ряд (2) сходится только для небольших значений x (до 1 км) и для реально существующих в атмосфере распределений показателя преломления. Поэтому предложен* численно-аналитический метод определения координат точек световой кривой, который базируется на том, что удается определить первый интеграл уравнения (1). Этот интеграл можно представить в виде

$$z'=\sqrt{\frac{n(z)}{n_0\cos^2\alpha}-1}, \tag{3}$$

где n_0 — показатель преломления, вычисленный в точке $x=0$; $z=0$; α — измеренное значение касательной в этой же точке.

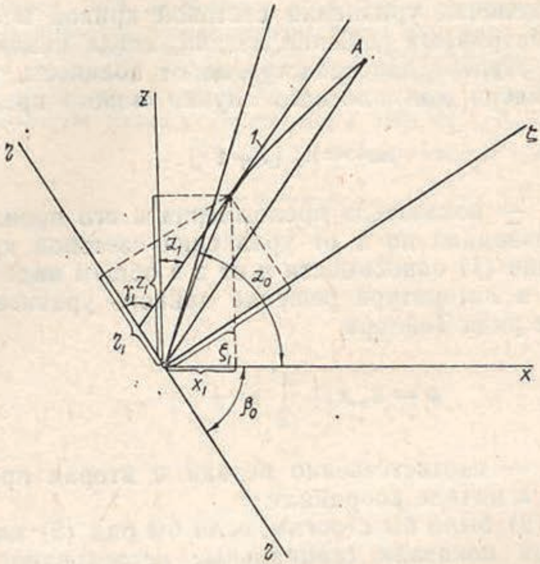
В случае, когда показатель преломления — функция координат x и z*, т. е., когда горизонтальным градиентом показателя преломления пренебречь нельзя, тогда уравнение Эйлера записывается в виде

$$nz''=n_z'(1+z'^2)-n_x'(1+z'^2)z'. \tag{4}$$

* *Хижак Л. С., Маслич Д. И., Дидух И. И.* Определение уравнений световой кривой над равнинной и однородной поверхностью при больших расстояниях // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 37. С. 94—96.

Найти первый интеграл уравнения в квадратурах не представляется возможным. Решение его можно получить только численными методами.

Здесь мы предлагаем численно-аналитический метод решения (4), базирующийся на первом интервале, как в случае независимости показателя преломления от абсциссы x и на преобразовании системы координат.



Метод поворота координат.

Рассмотрим теоретические основы этого метода. Пусть в некоторой системе координат $x0z$ задано поле показателя преломления $n(x, z)$ (см. рисунок).

Преобразуем теперь систему координат так, чтобы второй член уравнения (4) превратился в 0. Тогда, очевидно, в новой системе координат мы получим уравнение, как в случае, когда n не зависит от абсциссы. При этом будем рассматривать простейший случай преобразования — метод поворота системы координат.

Повернем систему координат на угол β_0, который вычислим по формуле

$$\beta_0 = z - \mathrm{arcc\,tg} \frac{\left(\dfrac{dn}{dz}\right)_0}{\left(\dfrac{dn}{dx}\right)_0}. \tag{5}$$

Здесь β_0 — угол касательной кривой $n(x, z) = \mathrm{const}$, в точке $x=0$; $z=0$. Таким образом, получим новую систему координат $\zeta 0 \eta$, в которой в окрестности начала координат показатель преломления не будет зависеть от абсциссы. Тогда уравнение (4) в новой системе координат перепишем в виде

$$n\eta''=n_\eta'(1+\eta'^2). \tag{6}$$

Предположим далее, что показатель преломления n не зависит от ζ не только в окрестности начала координат, но и в областях $\varsigma\leqslant\varsigma_1$ и $\eta\leqslant\eta_1$, в которых лежит точка *1* световой кривой. Тогда ординату точки *1* в системе $\zeta 0\eta$ можно определить, как и в *1*, из ряда Тейлора, представляющего решение уравнения (6), т. е.

$$\eta_1 = \zeta_1 \operatorname{tg}(\alpha_0+\beta_0)+\frac{\eta_0''}{2}\zeta_1^2, \tag{7}$$

где

$$\eta_0=\frac{n'_{h_0}}{n_0}[1+\operatorname{tg}^2(\alpha_0+\beta_0)].$$

Для получения координат точки *1* световой кривой в исходной системе воспользуемся формулами перехода в случае поворота системы координат, т. е.

$$x_1=\zeta_1\cos\beta_0-\eta_1\sin\beta_0, \tag{8}$$

$$z_1=\zeta_1\sin\beta_0-\eta_1\cos\beta_0.$$

Учитывая, что $n(x_1, y_1)=n(\zeta_1, \eta_1)$, для первого интеграла уравнения Эйлера в системе $\zeta 0\eta$ получаем выражение

$$\eta=\pm\sqrt{\frac{n(\eta)}{n_0\cos^2(\alpha_0+\beta_0)}-1}, \tag{9}$$

а угол касательной

$$\gamma_1=\operatorname{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{\frac{n(\eta_1)}{n_0\cos^2(\alpha_0+\beta_0)}-1}\right).$$

Тогда угол касательной в системе $x0z$ можно найти по формуле

$$\alpha_1=\gamma+\beta_0-90^\circ. \tag{10}$$

Перепишем теперь начало координат в точку *1*. Исходные данные для получения координат точки *2* — x_1, z_1, α_1 и $n(x_1, z_1)$. Повторяя те же рассуждения и для остальных точек световой кривой, в результате получаем целый ряд точек, по которым можно построить световую кривую. Таким образом, вычисления в одном цикле, т. е. передача исходных данных в последующую точку световой кривой, могут быть следующими:

1) вычисляем угол β_1 по формуле (5);

2) поворачиваем систему координат на угол;

3) выбираем отрезок ζ_1 такой, чтобы ряд Тейлора в этом отрезке был сходящимся и чтобы в области $\zeta\leqslant\zeta_1$ и $\eta<\eta_1$ показатель преломления не зависел от ζ;

4) вычисляем ординату η_1 точки *1* световой кривой, используя (7);

5) находим по формулам перехода (8) координаты точки *1*;

6) вычисляем по (9) угол касательной в точке *1* в системе;

7) по формуле (10) вычисляем угол касательной α_1 в системе $x0z$;

8) переносим начало координат в точку *1*.

Такой порядок работ позволяет вычислить координаты целого ряда точек световой кривой с учетом горизонтального градиента показателя преломления в случае, если его поле известно. Естественно, что метод этот является приближенным, так как, во-первых, на каждом участке световая кривая представляется двумя членами ряда Тейлора и, во-вторых, не всегда возможно предположить, что в области $\zeta \leqslant \zeta_1$ и $\eta \leqslant \eta_1$ показатель преломления не зависит от x. Если это условие не выполняется, то, возможно, следует изыскивать другие формы преобразования координат.

Статья поступила в редколлегию 18.12.89