УДК 528

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ОТВЕТ НА ПУБЛИКАЦИЮ Ю. И. МАРКУЗЕ «ПО ПОВОДУ СТАТЬИ М. Д. ГЕРАСИМЕНКО «РЕКУРРЕНТНОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ»

В публикации «По поводу статьи М. Д. Герасименко...» Ю. И. Маркузе высказал ряд замечаний и обвинений в мой адрес. До их обсуждения и ответов на них считаю необходимым отметить следующее: профессор Ю. И. Маркузе пытается ввести в заблуждение читателя, приписывая мне то, чего нет как в статье [4], так и в других моих работах, причем ввиду серьезности выдвинутых обвинений и их числа подобные приписки нельзя считать опечатками или случайностями.

Например, при цитировании моих фраз Ю. И. Маркузе весьма произвольно заключает их в кавычки и делает изъятия текста. Явным искажением сути является, например, игнорирование Ю. И. Маркузе нашей ссылки на хорошо известную статью Ю. А. Гордеева [6]. Вместо нашей ссылки на статью Ю. А. Гордеева здесь Ю. И. Маркузе делает ссылку на свою работу [10], как бы приписывая себе и создание теории уравнивания зависимых измерений. Мне же приписывается вывод общеизвестной формулы вида (6)

$$x = X^0 - N^{-1}b \tag{1}$$

в работе [3], чего нет на самом деле.

Приведенные примеры некорректности не требуют комментариев, поэтому правомерен вопрос: отвечать ли далее на поставленные Ю. И. Маркузе вопросы? Но для уточнения истины и некоторых моментов истории развития рекуррентных способов уравнивания попытаемся это сделать.

1. То, что коррелатный и параметрический способы взаимосвязаны и теоретически приводят к одинаковому результату — общеизвестно. Но с численной точки зрения, когда вычисления ведутся на ЭВМ с конечной точностью, эти результаты неидентичны, так как даже небольшое изменение последовательности вычислений может привести иногда к непредсказуемым результатам, что также общеизвестно и, вопреки утверждению Ю. И. Маркузе, в принципе меняет существо дела. Подтверждением сказанному являются и приведенные в [4] численные примеры, поэтому хотя бы с целью различия способов уже следует использовать разные названия.

Более того, приведенный в [4] рекуррентный коррелатный способ является лишь частным случаем многогруппового коррелатного способа, изложенного в [2, 3], когда в каждую группу входит лишь по одному условному уравнению вида

$$a_i \delta X_i - v_i + w_i = 0, \tag{2}$$

решение которого дает коррелату $k_i = -R_i^{-1} w_i$ и вектор уточненных неизвестных

$$X_i = X_{i-1} + Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}} k_i, \tag{3}$$

который в соответствии с теорией уравнивания зависимых измерений [6, 7] считается в дальнейшем измеренным с матрицей весовых коэффициентов

$$Q_i = Q_{i-1} - R_i^{-1} (a_i Q_{i-1})^{\mathrm{T}} (a_i Q_{i-1}). \tag{4}$$

Так какое же название дать этому способу или как его отличить от способа (1)? Не проясняет существа вопроса и введение Ю. И. Маркузе при критике статьи [4] новых обозначений. Например, вместо уравнения (2) он приводит уравнение

$$v_i - a_i \delta x_i + w_i = 0.$$

Отметим также, что рекуррентная форма коррелатного уравнивания, в том числе формула (3), рекомендовалась нами еще в 1975 г., а основополагающими в данной области следует считать работы Ю. А. Гордеева [6, 7], т. е., вероятно, даже не работу Калмана (1961 г.)

2. Ответ на это замечание в целом дан выше. Здесь следует лишь добавить, что я благодарен Ю. И. Маркузе за замечание редакционного характера, с которым я безоговорочно согласен, по отношению к некорректной фразе в [4], касающейся взаимосвязи фильтра Калмана и рекуррентного уравнивания.

Отметим также, что в [4] сделана ссылка на работу Ю. М. Неймана [12], так как именно в [12], а не в работе [13], на которую ошибочно ссылается Ю. И. Маркузе, применяется рекуррентная формула.

3. Поскольку излагаемый здесь вопрос весьма важен для практики, нельзя не упомянуть, что статья [4] написана с целью показать именно лучшую устойчивость коррелатной формы рекуррентного уравнивания, так как во многих своих работах (см., например, [11]) Ю. И. Маркузе отрицает необходимость использования алгоритма (2)—(4) на практике или же не касается вопросов устойчивости работы своих алгоритмов. В [4] не ставилась задача анализа объема вычислений во всех возможных алгоритмах вычислений. Следует лишь отметить, что, по нашему мнению, способ последовательного включения в сеть новых неизвестных, приводящий к значительному сокращению объема вычислений, по сути дела давно и хорошо известный в геодезической литературе метод последовательного урав-

нивания или наращивания геодезической сети. Новые разработки Ю. И. Маркузе в данном направлении естественно имеют практическую ценность и это нами не оспаривалось.

4. Рекуррентная формула действительно не требует обращения матриц, но плохая обусловленность может оказать непредсказуемое влияние на результат вычислений на любом этапе, примером чего может явиться попытка вычисления $Q_{\text{Н}}$ даже для элементарной свободной нивелирной сети на рис. 2 из [4]. Для экстремального случая сети с одним неизвестным, который в отличие от нашей статьи почему-то рассматривает Ю. И. Маркузе, вопроса о плохой или хорошей обусловленности естественно вообще не возникает и этот случай не имеет практического значения с точки зрения изучения теории получения устойчивого решения.

Ссылка на теорему и цитата «... «устойчивостью» по отношению к ошибкам округления» [1, с. 208] (Ю. И. Маркузе ошибочно указывает с. 209), по нашему мнению, некорректны. Дело в том, что Ю. И. Маркузе при цитировании слова «устойчивостью» опускает кавычки, в отличие от работы [1], а это в принципе меняет дело. Указанная теорема справедлива лишь при $\delta \to 0$. Практически же параметр регуляризации δ конечен и связан с конечной точностью вычислений.

Приведенные далее соображения Ю. И. Маркузе по решению и анализу системы (8) представляют, по нашему мнению, самостоятельный интерес.

В нашей статье [4] оба способа вычисления вектора неизвестных отметок специально и заведомо поставлены **в равные** условия, принятые сейчас на производстве [8]: все векторы и скаляры вычисляются и хранятся с удвоенной точностью, а элементы матрицы вычисляются с удвоенной, но хранятся с одинарной точностью. Одинаковым взят и вектор приближенных значений неизвестных.

Именно принцип сохранения идентичности исходной информации и вычислительной среды позволяет выполнить сравнение устойчивости различных алгоритмов и в этих условиях, как признает сам Ю. И. Маркузе, для коррелатного уравнивания «...погрешность вычислений оказывается значительно меньшей».

5. Вопрос о «плагиате», т. е. о вводе-выводе в процессе уравнивания фиктивных измерений или, по терминологии Ю. И. Маркузе, временной фиксации неизвестных. Нам не понятно, в связи с чем вообще возникло данное обвинение, так как в рассматриваемой статье [4] четко сказано, что «подобный путь исключения фиктивных измерений с целью получения N^{+} использован» ранее в статье Ю. И. Маркузе [10], « а для редукции N^{+} к требуемой g-обратной матрице — в работе» [5], причем правомерность последней ссылки не оспаривалась самим Ю. И. Маркузе в [9]. Более того, в работе [5] указано, что этот прием аналогичен алгоритму Ю. И. Маркузе, изложенному в [11], и его авторство нами не оспаривается.

Вопрос же об анализе экономической эффективности разработок Ю. И. Маркузе в [4] не ставился, о чем сказано выше в п. 3.

1. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М., 1977. 2. *Герасименко М. Д.* Метод непосредственного уравнивания координат геодезических построений способом условий и учет ошибок зависимых исходных данных. Владивосток, 1975. С. 8. — Рукопись деп. ВИНИТИ, № 3707—75. Деп. 3. *Герасименко М. Д.* Многогрупповой коррелатный способ для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1977. № 5. С. 57—60. 4. *Герасименко М. Д.* Рекуррентное уравнивание геодезических сетей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. № 46. С. 12—18. 5. *Герасименко М. Д., Шароглазова Г. А.* Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. 1985. № 7. С. 25—29. 6. *Гордеев Ю. А.* О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1960. № 2. С. 19—40. 7. *Гордеев Ю. А.* Уравнивание приращений координат линейной триангуляции по методу условных уравнений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1961. № 6. С. 3—21. 8. *Ефимов Г. Н.* Из опыта уравнивания больших геодезических сетей // Состояние и перспективы развития геодезии и картографии. М., 1986. С. 68—76. 9. *Маркузе Ю. И.* Способ временной фиксации неизвестных при уравнивании геодезических сетей со свободными блоками // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986. № 4. С. 13—24. 10. *Маркузе Ю. И.* Способы формирования исходной матрицы при рекуррентном уравнивании // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 5. С. 18—27. 11. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 12. *Нейман Ю. М.* Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 6. С. 33—45. 13. *Нейман Ю. М.* О последовательном анализе наблюдений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 2. С. 75—80.

Статья поступила в редколлегию 28.12.88