

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ МЕТОДАМИ РЕФРАКЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Угол вертикальной рефракции  $\delta$  в зависимости от метеорологических элементов, согласно [4], можно представить в виде

$$\delta = \delta_n + \alpha \frac{2}{S^2} \int_0^S \frac{c}{h^b} l \cdot dl; \quad (1)$$

$$\delta_n = 6.119 \frac{P}{T^2} \cdot \frac{S}{R_3} \cdot \rho''; \quad (2)$$

$$\alpha = 250.8 \frac{P}{T^2} \frac{S}{R_3} \cdot \rho'', \quad (3)$$

где  $\delta_n$  — угол нормальной рефракции;  $h$  — высота луча;  $S$  — расстояние между пунктами;  $P$  — давление (Мбар);  $T$  — температура, К;  $R_3$  — радиус кривизны Земли;  $c$  — аномальный градиент температуры на высоте 1 м;  $b \approx 1$  — степень при эквивалентной высоте.

Второй член формулы (1) называют аномальным углом рефракции, так как он определяется по аномальному вертикальному градиенту  $c$ :

$$\delta_a = \delta - \delta_n = \alpha \frac{2}{S^2} \int_0^S \frac{c}{h^b} \cdot l \cdot dl. \quad (4)$$

В практике геодезической рефрактометрии не раз уже отмечалась зависимость изменения углов рефракций, наблюденных по взаимообратным или смежным направлениям [5, 6, 8, 11]. Рас-

смотрим систему уравнений рефракций по двум направлениям (наблюденных одновременно):

$$\delta_1 = \delta_{n1} + \delta_{a1}, \quad \delta_2 = \delta_{n2} + \delta_{a2}. \quad (5)$$

Из системы (5), сделав несложные преобразования, определим соотношение аномальных углов и обозначим его через  $q$ :

$$q = \frac{\delta_{a1}}{\delta_{a2}} = \frac{\delta_1 - \delta_{n1}}{\delta_2 - \delta_{n2}}. \quad (6)$$

Допустив, что по одному из наблюдаемых направлений (например 2) угол вертикальной рефракции определяется из превышения, определенного геометрическим нивелированием, и при известном  $q$  система (5) имеет решение

$$\delta_1 = \delta_{n1} + q(\delta_2 - \delta_{n2}). \quad (7)$$

Нахождение вертикальной рефракции таким способом получило название «эталонного направления», или «рефракционного базиса» [5, 10]. Нормальные углы рефракции  $\delta_{n1}$  и  $\delta_{n2}$  в уравнении (7) определяются по несложным метеорологическим наблюдениям  $P$  и  $T$  согласно (2).

Рассматривая случай одновременных взаимных наблюдений зенитных расстояний, из которых определяют угол полной рефракции  $\sigma$  [6], на основании (5) запишем уравнения разности и суммы углов рефракций:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2; \quad \delta_1 - \delta_2 = \delta_{a1} - \delta_{a2}; \quad (8)$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_{a1} + \delta_{a2} + 2\delta_n, \quad (9)$$

где  $\delta_n = \delta_{n1} = \delta_{n2}$  приняты на основании того, что  $S_1 \approx S_2$ ,  $T_1 \approx T_2$ ,  $P_1 \approx P_2$ .

Решая систему (9) совместно с уравнением (8) и с учетом (6), получаем частные углы вертикальной рефракции:

$$\delta_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{q-1}{q+2} \left( \frac{\sigma}{2} - \delta_n \right), \quad \delta_2 = \delta - \delta_1, \quad \delta_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{q-1}{q+1} \left( \frac{\sigma}{2} - \delta_n \right). \quad (10)$$

Используя наблюдения одной и той же точки с вертикального базиса (или обратно) по формулам [8], можно получить соответствующую разность рефракций  $\Delta\delta$

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2. \quad (11)$$

Частные углы рефракций  $\delta_1$  и  $\delta_2$  определяем, решая систему (9) с уравнениями (11) и (6):

$$\delta_1 = \delta_n + \frac{q}{q-1} \cdot \Delta\delta, \quad \delta_2 = \delta_1 - \Delta\delta, \quad \delta_2 = \delta_n + \frac{1}{q-1} \Delta\delta. \quad (12)$$

При различных способах наблюдений уравнения (7), (10), (12) позволяют получить частные углы рефракций, применяя коэффициент рефракционного соотношения  $q$ .

Распишем соотношение аномальных углов, используя (1):

$$\frac{\delta_{a1}}{\delta_{a2}} = q = \frac{\frac{P_1}{T_1^2} \cdot \frac{S_1}{R_3} \cdot \frac{2}{S_1^2} \int_0^S \frac{c_1}{h_1^g} \cdot l \cdot dl}{\frac{P_2}{T_2^2} \cdot \frac{S_2}{R_3} \cdot \frac{2}{S_2^2} \cdot \int_0^S \frac{c_2}{h_2^g} \cdot l \cdot dl}. \quad (13)$$

Приняв упрощения  $T_1=T_2$ ,  $P_1=P_2$ , которые не вносят больших изменений, но при необходимости могут быть учтены, запишем

$$q = \frac{S_1 \cdot \frac{c_1}{h_1^g}}{S_2 \cdot \frac{c_2}{h_2^g}}, \quad (14)$$

где  $h_e^g = \frac{2}{S^2} \int_0^S \frac{c}{h^g} \cdot l \cdot dl$  — эквивалентная высота. Полагая  $b=1$

и при одинаковых сторонах визирования  $S_1=S_2$  (для двухстороннего нивелирования и вертикально-базисных наблюдений) [5, 6, 8, 10],

$$q = \frac{h_{e2}}{h_{e1}}. \quad (15)$$

Это подтверждает линейную зависимость аномальной рефракции между направлениями. Запишем уравнение регрессии между рядами наблюдений углов рефракций на основании предполагаемой линейной зависимости:

$$\bar{\delta}_1 = \delta_{1i} + r \frac{m_{\delta_i}}{m_{\delta_2}} (\bar{\delta}_2 - \delta_{2i}), \quad (16)$$

где  $r$  — коэффициент корреляции между рефракциями различных направлений,  $m_{\delta}$  — среднее квадратическое отклонение углов рефракции  $\delta_i$  от среднего значения  $\bar{\delta}$ .

На основании свойств коэффициента корреляции  $r$  и средних квадратических отклонений  $m_{\delta}$  коэффициенты  $r$  и  $m$  можно определить из наблюденных зенитных расстояний  $Z$  без вычисления рефракций  $\delta$  [2].

Предполагая, что  $i$  — момент времени, значения рефракций известны (период спокойных изображений) и численно равны нормальным значениям рефракции, перепишем уравнение регрессии в следующем виде:

$$\bar{\delta}_1 = \delta_{1i} + r \frac{m_{z_i}}{m_{z_2}} (\bar{\delta}_2 - \delta_{2i}). \quad (17)$$

Из (17) вычисляем  $q$ :

$$q = r \frac{m_{z_1}}{m_{z_2}} = \delta_{z_1 z_2}. \quad (18)$$

Здесь  $\rho_{z_1 z_2}$  — коэффициент линейной регрессии [2]:

$$\rho_{z_1 z_2} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{1i} \cdot Z_{2i} - n \cdot \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Z_{1i}^2 - n \cdot \bar{Z}_1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n Z_{2i}^2 - n \cdot \bar{Z}_2^2}}, \quad (19)$$

где  $n$  — количество пар измерений.

Для определения  $q$  можно использовать и свойства турбулентной атмосферы [9], а именно флюктуационные характеристики излучения.

Так, в [3] предлагаются уравнения рефракции, зависящие от максимальной амплитуды колебаний изображений  $\sigma_{\alpha \max}$ :

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_n + 0.035 \sigma_{\alpha \max} \left( \frac{S}{h_9} \right)^{1/2} \cdot D^{1/6}, \\ \delta &= \delta_n + \frac{3}{10^4} \cdot \frac{\sigma_{\alpha \max}^2 P}{\gamma T^2} D^{1/3}, \end{aligned} \quad (20)$$

на основании которых

$$q = \frac{\sigma_{\alpha \max 1} \cdot S_1^{1/2} \cdot h_{92}^{1/2}}{\sigma_{\alpha \max 2} \cdot S_2^{1/2} \cdot h_{91}^{1/2}}, \quad q = \frac{\sigma_{\alpha \max 1}^2}{\sigma_{\alpha \max 2}^2}. \quad (21)$$

При способах рефракционных соотношений для вычисления  $q$  можно использовать и длиннопериодические колебания  $Z$ , а также другие флюктуационные характеристики [7]:

$$q = m_{z_1}^2 / m_{z_2}^2, \quad (22)$$

или в удобной для вычислений форме

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{1i}^2 - n \cdot \bar{Z}_1^2}{\sum_{i=1}^n Z_{2i}^2 - n \cdot \bar{Z}_2^2}. \quad (23)$$

Справедливость связи между длиннопериодическими колебаниями и эквивалентной высотой подтверждена в [4] по построенной эмпирической зависимости

$$m_Z = F'' \frac{S^{2/3}}{h_9}, \quad (24)$$

где  $F''$  — численный коэффициент.

$$q = \frac{m_{z_1}^{3/2} \cdot S_1^{1/6}}{m_{z_2}^{3/2} \cdot S_2^{1/6}}. \quad (25)$$

Полученные уравнения апробированы на результатах экспериментальных наблюдений, выполненных в ЛПИ, при различных стратификациях атмосферы. Выбор методики определения  $q$  зависит в основном от условий наблюдений.

По точности определений частных углов рефракций отмечается преимущество турбулентных предпосылок в определении  $q$ , хотя подбор степени  $b$  при эквивалентных высотах для различных стратификаций и условий наблюдений дает хорошие результаты.

Уравнения (22), (23) являются простыми в обработке и дающими хорошие результаты вычислений без определения  $h_0$  и измерения колебаний, основываясь лишь на рядах измеренных зенитных расстояний. Десяти приемов измерений  $Z$  по смежным или взаимным направлениям, выполненных вблизи периодов спокойных изображений, достаточно для уверенного вычисления частного угла вертикальной рефракции методами рефракционных соотношений. Как уже отмечалось [7], использование длиннопериодических колебаний актуально в инверсионный период, в районах с преобладающим инверсионным строением атмосферы, где термическая турбулентность практически отсутствует и рассчитывать на мгновенное измерение колебаний не приходится.

1. Алексеев А. В., Маслич Д. И., Перий С. С., Савчук С. Г. Исследование пространственно-временных флуктуаций лазерных лучей по материалам синхронных наблюдений на концах трассы // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 42. С. 3—10.
2. Большаков В. Д., Маркузе Ю. И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М., 1984. З.
3. Джуман Б. М. Зависимость амплитуды колебаний изображений от высоты визирного луча // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 16—21.
4. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования // Тр. ЦНИИГАиК. 1955. Вып. 102. С. 112.
5. Никольский Е. К. О сетях с рефракционными базисами // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1973. Вып. 18. 6. Островская С. А. Учет вертикальной рефракции на основании взаимных наблюдений и эквивалентных высот луча // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. Вып. 3. С. 51—60.
7. Островский А. Л., Кравцов Н. И., Перий С. С. Определение частных углов рефракций по дрожаниям центров лазерного пятна и угловым колебаниям целей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 45. С. 69—77.
8. Островский А. Л., Перий С. С. А. с. 1362927 (СССР). Способ определения частного угла вертикальной рефракции // Бюл. изобрет. 1987. № 9.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
10. Глустяк Б. Т. Исследование закономерностей изменения коэффициентов земной рефракции в прибрежной зоне больших поверхностей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1974. Вып. 20. С. 86—93.
11. Глустяк Б. Т., Перий С. С. Статистическая характеристика световых лучей на морских трассах // Тез. докл. Всесоюз. совещ. по рефракции электромагнитных волн в атмосфере. Томск, 1983. С. 281—284.