

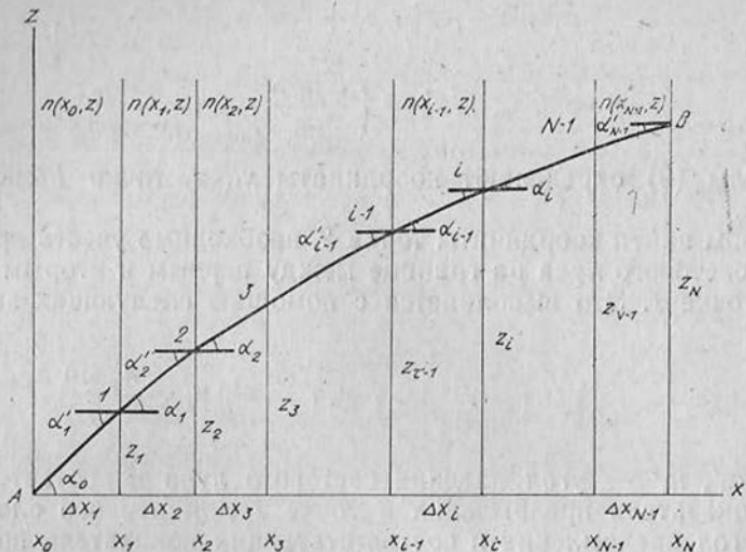
Л. С. ХИЖАК, А. Е. ФИЛИППОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК
СВЕТОВОЙ КРИВОЙ
В СЛУЧАЕ ДВУХМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Применение метода определения координат точек световой кривой для случая, когда показатель преломления — только функция высоты z над горизонтальной плоскостью, дает удов-

летьорительные результаты при вычислениях для равнинной местности *. Однако для всхолмленной и горной местности, когда условие независимости показателя преломления n от x не выполняется, указанный метод может привести к значительным погрешностям.

В настоящей статье предлагается численно-аналитический метод решения задачи при n , являющемся функцией x и z . Поясним его сущность.



Траектория световой кривой.

Пусть на рисунке ось z пространственной прямоугольной системы координат $Axyz$ совпадает с направлением отвесной линии в пункте наблюдения A . Плоскость xAz проходит через визирную цель B . Предположим, что показатель преломления n — функция только x и z . Тогда световая кривая между точками B и A будет лежать в плоскости xAz .

Чтобы найти уравнение световой кривой, необходимо решить уравнение Эйлера вида

$$n(x, z) z'' = n_z'(x, z) (1 + z'^2) - n_x z' (1 + z'^2). \quad (1)$$

Однако в квадратурах это уравнение не решается даже в простейшем случае. Если n не зависит от x , то (1) можно решить в некоторых частных случаях, в общем же случае оно также не решается.

В работе, на которую мы ссылались выше, приведен численно-аналитический метод решения уравнения (1), когда n не-

* Хижак Л. С., Маслич Д. И., Дидух И. И. Приближенный метод нахождения уравнения световой кривой при определении рефракции // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1981. Вып. 34. С. 88—92.

зависит от x . Воспользуемся основами этого метода для случая, когда n является функцией x и z . Для этого разобьем весь участок прохождения светового луча на N вертикальных слоев с таким расчетом, чтобы в каждом из них с практической точностью показатель преломления не зависел от x . Для первого слоя запишем

$$x_1 = x_0 + \Delta x_1, \quad (2)$$

$$z_1 = z_0 + z'_0 \Delta x_1 + \frac{1}{2} z''_0 \Delta x_1^2,$$

где

$$z'_0 = \operatorname{tg} \alpha_0; \quad z''_0 = \left(\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right)_0 = \frac{(n' z)_0}{n_0 \cos^2 \alpha_0}.$$

Формулы (2) определяют координаты x_1 , z_1 точки 1 световой кривой.

Чтобы найти координаты точки 2, необходимо учесть преломление светового луча на границе между первым и вторым слоями в точке 1. Это выполняется с помощью следующих зависимостей:

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{n'_1}{n_0 \cos \alpha_0} \right)^2 - 1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{n'_1 \sin \alpha'_1}{n_1}. \quad (3)$$

Здесь α'_1 , n'_1 — угол падения светового луча и соответствующий показатель преломления в точке 1 для первого слоя; α_1 , n_1 — угол преломления и соответствующий показатель преломления в той же точке для второго слоя; $(n_z)_1$ — вертикальный градиент в точке 1 показателя преломления n'_1 .

Координаты x_2 , z_2 с учетом (3) определяем формулами

$$z'_2 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad z''_2 = \left(\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right)_1 = \frac{(n_z)_1}{n_1 \cos^2 \alpha_1},$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_2, \quad z_2 = z_1 + z'_1 \Delta x_2 + \frac{1}{2} z''_1 \Delta x_2^2.$$

Аналогично вычисляются координаты последующих точек. Так, для точки с номером i ($i=1, N$) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha'_{i-1} = \pm \sqrt{\left(\frac{n'_{i-1}}{n_{i-2} \cos \alpha_{i-2}} \right)^2 - 1},$$

$$\sin \alpha_{i-1} = \frac{(n_z)_{i-1} \sin \alpha'_{i-1}}{n_{i-1}},$$

$$z'_{i-1} = \operatorname{tg} \alpha_{i-1}, \quad z''_{i-1} = \left(\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right)_{i-1} = \frac{(n_z)_{i-1}}{n_{i-1} \cos^2 \alpha_{i-1}},$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i, \quad z_i = z_{i-1} + z'_{i-1} \Delta x_i + \frac{1}{2} z''_{i-1} \Delta x_i^2.$$

По завершении последнего шага интегрирования ($i=N$) вычисляем угол α'_N наклона кривой к горизонту в конечной точке, используя формулу

$$\operatorname{tg} \alpha'_N = \pm \sqrt{\left(\frac{n'_N}{n_{N-1} \cos_{N-1}} \right)^2 - 1},$$

и получаем углы рефракции в начальной и конечной точках кривой:

$$r_0 = \alpha_0 - \operatorname{arctg} \frac{z_N}{x_N}, \quad r_N = \operatorname{arctg} \frac{z_N}{x_N} - \alpha'_N.$$

Приведенная методика апробирована на модели.