УДК 528.118:519.24

И. В. ДЖУНЬ

ТЕОРИЯ ВЕСА ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ, ПОСТРОЕННАЯ НА ПРИНЦИПЕ ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть x_i — результаты многократных наблюдений, имеющие апостериорную плотность вероятности y, которую мы предполагаем одновершинной и симметричной. Тогда абсциссу $\bar{x}$ вершины кривой распределения можно найти при условии минимума функции правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^{n} y(v_i), \tag{1}$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$.

Полагая, что $\ln L$ зависит только от $\bar{x}$, имеем

$$-\frac{\partial \ln L}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y'(v_i)}{y(v_i)} = 0. \qquad (2)$$

Умножая числитель и знаменатель выражения (2) на $x_i - \bar{x}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y'(v_i)}{y(v_i)\, v_i} (x_i - \bar{x}) = 0. \qquad (3)$$

Откуда находим $\bar{x}$ по следующей формуле, предполагающей применение метода последовательных приближений

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i / \sum_{i=1}^{n} P_i, \qquad (4)$$

где вес i-го измерения

$$P_i = y'(v_i) \,/\, y(v_i) \cdot v_i. \qquad (5)$$

Таким образом, в соответствии с принципом правдоподобия вес измерения определяется видом апостериорной плотности случайных ошибок измерений и величиной v_i, т. е. вес равен частному от деления тангенса наклона касательной к кривой плотности y в точке с координатами $y(v_i)$, v_i на произведение координат этой же точки. Попутно заметим, что изложенный нами принцип взвешивания не есть новым. Его применил, правда, не в таком явном виде, еще Д. Бернулли в мемории «Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собой наблюдениям и устанавливаемое отсюда наиболее правдоподобное заключение» [6]. В этой работе Д. Бернулли вторично после Ламберта применил метод максимального правдоподобия для отыскания абсциссы $\bar{x}$ вершины кривой распределения погрешностей наблюдений. Однако он проигнорировал описанные Ламбертом вероятностные свойства ошибок наблюдений и принял в качестве кривой плотности ошибок полуокружность вида

$$y = \sqrt{r^2 - (x_i - \bar{x})^2}, \quad y > 0,\ x > 0. \qquad (6)$$

Плотность (6) приводит к весам

$$P_i = [r^2 - (\bar{x} - x_i)^2]^{-1}, \qquad (7)$$

которые возрастают с увеличением x_i. По этому поводу в [6, с. 136] отмечено: «Этот результат должен был казаться неожиданным... Быть может, ввиду этой неожиданности Д. Бернулли и не отметил прямо, что оценка $\bar{x}$ в его формулах зависит больше от крайних, а не от средних наблюдений. И объективно получилось так, что современники Д. Бернулли, прочитав его исходные соображения о нецелесообразности применения среднего арифметического, могли ошибочно считать, что автор предлагает усилить роль средних наблюдений. Именно такую ошибку совершил Эйлер в комментарии, приложенном к меморию Д. Бернулли. Эйлер высказался против оценки максимального правдоподобия, предложив взамен оценку с весами

$$P_i = r^2 - (\bar{x} - x_i)^2.$$

Впрочем его оценка также соответствовала максимуму некоторой функции правдоподобия $[r^2 - (\bar{x} - x_1)] + [r^2 - (\bar{x} - x_2)^2] + ...a$» [6]. Таким образом, получилось, что приняв для описания распределения ошибок наблюдений довольно нетипичную плотность (6), Д. Бернулли тем самым фактически дискредитировал очень интересную и многообещающую идею взвешивания наблюдений, основанную на принципе максимального правдоподобия, идею, которая тогда на фоне успехов классической теории ошибок показалась чуть ли не курьезом. К этой идее более чем через сто лет возвратился С. Ньюкомб [8, 9] ввиду явного несогласия действительных распределений ошибок астрономических наблюдений с распределением Гаусса.

Для того чтобы показать перспективность и важность для теории математической обработки геодезических наблюдений формулы веса измерения (5), применим ее для некоторых, наиболее часто используемых в геодезии распределений, а также для других статистических распределений, которые можно успешно использовать при математической обработке геодезических измерений.

Пусть апостериорная функция плотности $y(v)$ в (5) — гауссова с параметрами $\bar{x}$, σ, тогда

$$P = \frac{y'(v)}{y(v)\,v} = -\frac{(2\pi\sigma^2)^{-0,5}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{v^2}{\sigma^2}\right)}{(2\pi\sigma^2)^{-0,5}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{v^2}{\sigma^2}\right)}\cdot\frac{-2v}{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{v} = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (8)$$

Как видим, необычность, уникальность распределения Гаусса заключается в том, что для него $y'(v)/y(v)\cdot v = \text{const} = \sigma^{-2}$.

Если предположить, что ошибки геодезических измерений следуют L_p-распределению с плотностью вероятности [5]

$$y = \frac{p}{2\sqrt[p]{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{1}{p}\left|\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right|^p\right), \quad (9)$$

то, как легко найти,

$$P = |x - \bar{x}|^{p-2}\cdot\sigma^{-p}. \quad (10)$$

Веса (10) при $p < 2$ имеют точку разрыва при $x = \bar{x}$, поэтому в необходимых случаях вместо плотности (9) можно использовать плотность распределения Пирсона VII типа, которая часто задается в виде дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{v}{c_0 + c_2 v^2}, \quad (11)$$

где

$$c_0 = 2\sigma^2 \beta_2 / (5\beta_2 - 9); \quad c_2 = (\beta_2 - 3) / (5\beta_2 - 9); \quad \beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2; \quad (12)$$

μ_ν — центральные моменты распределения порядка ν. Учитывая (11), (12) и (5), получаем веса

$$P = \frac{5\beta_2 - 9}{2\sigma^2 \beta_2 + (\beta_2 - 3) v^2} = \frac{5\varepsilon + 6}{2\sigma^2 \beta_2 + \varepsilon v^2}, \quad (13)$$

здесь ε — эксцесс распределения.

Оценки, вычисляемые с весами (13), уже использовались в астрометрии [2, 3] и при обработке наблюдений на баллистическом гравиметре [4]. Однако параметры σ и ε, используемые при вычислении весов в (13), находим по методу моментов, оценки которого не обладают наименьшей дисперсией. И это, пожалуй, единственное замечание, которое можно было бы сделать к формуле (13), хотя оно и не есть определяющим, так как увеличивая число измерений, можно всегда получить оценки для σ и ε с любой заданной наперед точностью и по методу моментов. Тем не менее в тех случаях, когда необходимо применять особо рафинированные методы математической обработки, можно при вычислении весов воспользоваться и эффективными оценками параметров $\bar{x}$, σ, m распределения Пирсона VII типа [5]:

$$y = \frac{m!}{\sqrt{2\pi (m - 0{,}5)}\,(m - 0{,}5)!\,\sigma} \left\{ 1 + \frac{m^2 (x - \bar{x})^2}{2 (m - 0{,}5)^3 \sigma^2} \right\}^{-m}. \quad (14)$$

На основе (14) с учетом (5) получим следующую весовую функцию:

$$P = -\frac{y'}{y} \cdot \frac{1}{x - \bar{x}} = \left[\left(\frac{m - 0{,}5}{m} \right)^3 \sigma^2 + \frac{(x - \bar{x})^2}{2m} \right]^{-1}, \quad (15)$$

где $\bar{x}$, σ, m — параметры распределения Пирсона VII типа, найденные методом максимального правдоподобия по формулам, приведенным в [5]. Заметим, что кроме свойства эффективности, весовая функция (15) имеет перед L_p-весовой функцией одно существенное преимущество, заключающееся в том, что веса P в (15) регулярны на всем диапазоне $x = \pm\infty$ и конечны в точке $x = \bar{x}$.

Таким образом, весовую функцию (15), как впрочем и функцию (13), можно успешно использовать в методах уравнительных вычислений, учитывающих апостериорную плотность закона распределения остаточных погрешностей и описанных в важной в теоретическом отношении работе [7]. Для этого нужно уравнение ошибок

$$A_i - K_{ij} \beta_j = v_i,$$

где A_i — наблюдения; K_{ij} — известные постоянные коэффициенты; β_j — искомые поправки; v_i — остаточные погрешности после уравнивания классическим методом наименьших квадратов, умножить на $\sqrt{P_i}$, вычисленные по формулам (15) или (13),

$$A_i \sqrt{P_i} - K_{ij} \sqrt{P_i} \cdot \beta_i = v_i \sqrt{P_i} \tag{16}$$

и решить систему уравнений (16), если $\Sigma v^2 P = \min$.

Веса (15) или (13) можно использовать и при обработке многократных наблюдений одной величины в тех случаях, когда установлены параметры $\bar{x}$, σ, m (или эксцесс ε) закона распределения ошибок, присущих данному геодезическому инструменту или методу геодезических наблюдений. Немаловажно и то обстоятельство, что в случае нормального закона распределения ошибок ($m=\infty$ или $\varepsilon=0$), оценки, построенные с использованием весов (15) или (13), идентичны оценкам классического метода наименьших квадратов.

1. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М., 1968. 2. *Джунь И. В.* О назначении весов астрономическим наблюдениям // Астрометрия и астрофизика. 1970. № 10. С. 24—26. 3. *Джунь И. В.* О возможности количественной оценки степени постоянства условий наблюдений на зенит-телескопах / Астрометрия и астрофизика. 1984. № 53. С. 93—97 4. *Джунь И. В.* Новый способ оценки результатов измерений на абсолютном лазерном баллистическом гравиметре // Повторные гравиметрические наблюдения: вопросы теории и результаты. М., 1984. С. 101—109. 5. *Джунь И. В.* Некоторые аспекты практического использования L_p- и эксцесс-оценок при обработке геодезических измерений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986. № 4. С. 42—48. 6. История математики // Под ред. А. П. Юшкевича. М., 1972. Т. 3. 7. *Мещеряков Г. А., Волжанин С. Д., Киричук В. В.* Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок // Геодезия и картография. 1984. № 2. С. 9—11. 8. *Newcomb S.* A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result / Amer. J. Math. 1886. № 1/4. P. 343—366. 9. *Newcomb S.* Researches of the motion of the Moon. 11. Astronomical Papers // Published by the US Nautical Office. 1912. V. 9. P. 1—249.

Статья поступила в редколлегию 21. 01. 87