УДК 528.412

И. И. КОВАЛИВ, З. Р. САВЯК

ТОЧНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ ПО ЧЕТЫРЕМ ИСХОДНЫМ ПУНКТАМ

В работе [2] теоретически оценена точность линейной засечки на плоскости по трем пунктам в зависимости от геометрии исходного треугольника. Получены формулы оценки точности через линейные величины и найдена точка минимума погрешностей, совпадающая с точкой Лемуана треугольника.

В настоящей статье задача обобщается на трехмерное пространство для четырех исходных пунктов, не лежащих в одной плоскости. При этом устраняется двузначность решения. Тэтраэдр, совпадающий своими вершинами с исходными пунктами, в дальнейшем именуем «пирамида».

Пусть от определяемого пункта $P(x, y, z)$ измерены с погрешностью $m_s = \text{const}$ расстояния S_i к вершинам пирамиды T_i (x_i, y_i, z_i), где $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$S_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2. \qquad (1)$$

Вычисляя $S_i^2 - S_1^2$ и обозначая $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$;

$$S_i^2 - R_1^2 + R_1^2 - R_i^2 = 2A_i; \quad \Delta x_i = x_i - x_1;$$

$$\Delta y_i = y_i - y_1; \quad \Delta z_i = z_i - z_1,$$

получаем систему трех линейных независимых уравнений

$$\Delta x_i x + \Delta y_i y + \Delta z_i z = A_i \text{ при } i = 2, 3, 4.$$

Решая эту систему по правилу Крамера, определим x, y, z как функции от измеренных расстояний S_i. Определители системы:

$$\det[A_i, \Delta y_i, \Delta z_i] = A_2 c_{2x} - A_3 c_{3x} + A_4 c_{4x},$$
$$\det[\Delta x_i, A_i, \Delta z_i] = -A_2 c_{2y} + A_3 c_{3y} - A_4 c_{4y},$$
$$\det[\Delta x_i, \Delta y_i, A_i] = A_2 c_{2z} - A_3 c_{3z} + A_4 c_{4z},$$
$$\det[\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i] = \pm 6V,$$

где V — объем пирамиды, а буквой c обозначены соответствующие алгебраические дополнения, не зависящие от S_i.

Тогда

$$x \pm = \frac{1}{12V}[(c_{3x} - c_{2x} - c_{4x}) S_1^2 + c_{2x} S_2^2 - c_{3x} S_3^2 + c_{4x} S_4^2 + B_x];$$

$$y \pm = \frac{1}{12V}[(c_{2y} + c_{4y} - c_{3y}) S_1^2 - c_{2y} S_2^2 + c_{3y} S_3^2 - c_{4y} S_4^2 + B_y];$$

$$z \pm = \frac{1}{12V}[(c_{3z} - c_{2z} - c_{4z}) S_1^2 + c_{2z} S_2^2 - c_{3z} S_3^2 + c_{4z} S_4^2 + B_z],$$

где постоянные B_x, B_y, B_z не зависят от S_i. Для расчета значений x, y, z можно воспользоваться формулами, приведенными в [1].

На основании теории ошибок найдем среднюю квадратическую погрешность определения положения пункта:

$$m^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = \frac{m_s^2}{9V^2} \sum_{i=1}^{4} F_i^2 S_i^2,$$

где F_i — площади граней пирамиды, не содержащих вершину T_i.

Подставляя в последнее уравнение S_i^2 из выражения (1), получаем

$$m^2 = \frac{m_s^2}{9V^2}(Gx^2 + Gy^2 + Gz^2 - 2Dx - 2Ey - 2Fz + C), \quad (2)$$

где

$$G = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2; \quad D = F_1^2 x_1 + F_2^2 x_2 + F_3^2 x_3 + F_4^2 x_4;$$
$$E = F_1^2 y_1 + F_2^2 y_2 + F_3^2 y_3 + F_4^2 y_4; \quad F = F_1^2 z_1 + F_2^2 z_2 + F_3^2 z_3 +$$
$$+ F_4^2 z_4; \quad C = F_1^2 R_1^2 + F_2^2 R_2^2 + F_3^2 R_3^2 + F_4^2 R_4^2.$$

Представить поверхность m в четырехмерном пространстве по (2) достаточно сложно, поэтому покажем поверхности уровней $m = m_0 = \text{const}$ в системе координат x, y, z. Разделим уравнение (2) на $G > 0$ и выделим полные квадраты

$$\left(x-\frac{D}{G}\right)^2+\left(y-\frac{E}{G}\right)^2+\left(z-\frac{F}{G}\right)^2+\frac{CG-D^2-E^2-F^2}{G^2}-$$

$$-\frac{9V^2}{G}\left(\frac{m_0}{m_s}\right)^2=0. \qquad (3)$$

Исследуем полученное уравнение пространственной поверхности второго порядка. Для этого введем обозначения:

$$x_M=\frac{D}{G}=\frac{F_1^2x_1+F_2^2x_2+F_3^2x_3+F_4^2x_4}{F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2},$$

$$y_M=\frac{E}{G}=\frac{F_1^2y_1+F_2^2y_2+F_3^2y_3+F_4^2y_4}{F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2},$$

$$z_M=\frac{F}{G}=\frac{F_1^2z_1+F_2^2z_2+F_3^2z_3+F_4^2z_4}{F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2}. \qquad (4)$$

В уравнении (3) сумма первых трех слагаемых не меньше нуля. Значит, алгебраическая сумма последних двух слагаемых не больше нуля, т. е. уравнение (3) — уравнение семейства концентрических сфер с центром в точке $O(x_M, y_M, z_M)$, радиусы которых пропорциональны заданным погрешностям m_0. Другими словами, поверхности уровня погрешностей определяемых пунктов представляют собой семейство концентрических сфер с центром в точке $O(x_M, y_M, z_M)$, которая является наивыгоднейшим положением определяемого пункта.

Подставим в (3) координаты точки O и вычислим минимальную погрешность определения пунктов по данной пирамиде

$$m_{\min}^2=\frac{CG-D^2-E^2-F^2}{9V^2G}m_s^2=k_{\min}^2m_s^2, \qquad (5)$$

где $k_{\min}$ — коэффициент перехода от m_s к $m_{\min}$;

$$k_{\min}^2=\frac{CG-D^2-E^2-F^2}{9V^2G}. \qquad (6)$$

Учитывая (5), формулу (2) можно записать в виде

$$m=\sqrt{\frac{F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2}{9V^2}[(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2]\times}$$

$$\overline{\times m_s^2+m_{\min}^2}.$$

Подставив в (6) значения коэффициентов через элементы пирамиды по (2), получим

$$K_{\min}^2=\frac{F_1^2F_2^2a_{21}^2+F_1^2F_3^2a_{31}^2+F_1^2F_4^2a_{41}^2+F_2^2F_3^2a_{32}^2+F_2^2F_4^2a_{42}^2+F_3^2F_4^2a_{43}^2}{9V^2(F_1^2+F_2^2+F_3^2+F_4^2)}, \qquad (7)$$

где a_{ij}, $(j=1, 2, 3)$ — длины ребер пирамиды между вершина-

ми T_i и T_j. Отсюда $k_{\min}$ не зависит от выбранной системы координат, а также не зависит от размера пирамиды, а зависит лишь от ее формы.

Физический смысл наивыгоднейшего положения определяемого пункта: точка $O(x_M, y_M, z_M)$ — это центр тяжести системы, расположенных в вершинах пирамиды грузов, массы которых численно равны квадратам площадей противолежащих граней.

Для объяснения геометрического смысла наивыгоднейшего положения определяемого пункта приведем следующие два доказанных утверждения: 1) для любого n ($n=1, 2, 3\ldots$) на каждой грани пирамиды можно указать единственную точку N, такую, что при соединении ее с вершинами грани образуются три треугольника, площади которых относятся между собой как n-е степени площадей остальных граней, имеющих общие с образованными треугольниками стороны (ребра пирамиды), соответственно; 2) прямые линии, проведенные через вершины пирамиды и точки N на противолежащих гранях, пересекаются в одной точке Q_n.

Геометрический смысл наивыгоднейшего положения определяемого пункта: точка $O(x_M, y_M, z_M)$ совпадает с точкой Q_n пирамиды при $n=2$. Отсюда следует, что наивыгоднейший пункт находится всегда «внутри» пирамиды.

По выражению (7) трудно оценить форму пирамиды, при которой $k_{\min}$ принимает наименьшее значение.

Для исследования $k_{\min}$ совместим вершину T_1 пирамиды с началом координат, а грань, не содержащую вершину T_4 (основание), с плоскостью $z=0$.

Исследуя зависимость $k_{\min}=f(x_3, y_3)$ при постоянных x_2, y_2, x_4, y_4, z_4, находим, что $k_{\min}$ принимает минимальные значения при следующих условиях:

основание с заданными одной из сторон и площадью имеет форму равнобедренного треугольника;

основание заданной площади имеет форму равностороннего треугольника;

вершина T_4 проектируется на основание в точку пересечения его медиан.

Если вершину T_4 пирамиды перемещать по линии, перпендикулярной основанию, то (7) можно записать в виде

$$k^2_{\min} = \frac{az_4^4 + bz_4^2 + c}{dz_4^4 + qz_4^2}, \tag{8}$$

где a, b, c, d, q — коэффициенты, зависящие от x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4.

Обозначим расстояния от проекции вершины T_4 пирамиды на основание: 1) до стороны треугольника основания, не содержащей вершину T_i, через m_i; 2) до вершины T_i основания через l_i.

Выразим коэффициенты (8) через элементы пирамиды:

$$a = 3\,a_{21}^2\,a_{31}^2\,a_{32}^2 + 4\,F_4^2\,(a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2),$$

$$b = 2a_{21}^2 a_{31}^2 a_{32}^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + 4F_4^2 [a_{32}^2 (m_1^2 + l_1^2) + a_{31}^2 (m_2^2 + l_2^2) + a_{21}^2 (m_3^2 + l_3^2)],$$

$$c = a_{21}^2 a_{31}^2 a_{32}^2 (m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) + 4F_4^2 (a_{32}^2 m_1^2 l_1^2 + a_{31}^2 m_2^2 l_2^2 + a_{21}^2 m_3^2 l_3^2),$$

$$d = 4F_4^2 (a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2),$$

$$q = 4F_4^2 (a_{32}^2 m_1^2 + a_{31}^2 m_2^2 + a_{21}^2 m_3^2 + 4F_4^2).$$

Исследуя (8) на минимум, получаем уравнение

$$z_4^4 (bd - aq) + 2cd z_4^2 + cq = 0, \tag{9}$$

из которого, если оно имеет действительные корни, определяют наивыгоднейшее по $k_{\min}$ положение вершины T_4 при заданном основании. Так, при основании пирамиды в форме равностороннего треугольника со сторонами, равными единице, и проекции ее вершины в ортоцентр основания, получаем зависимость

$$k_{\min}^2 = \frac{7z_4^4 + (23/12) z_4^2 + 1/9}{3z_4^4 + z_4^2}. \tag{10}$$

Подставляем значения коэффициентов выражения (10) в уравнение (9) и находим $z_{4\text{наивыг}} = \sqrt{6}/3$. Это значит, что наименьшего значения $k_{\min}$ достигает в правильном тетраэдре.

После подстановки $z_4 = \sqrt{6}/3$ в (10) получим значение наименьшего возможного $k_{\min}$:

$$k_{\min\,\min} = 1{,}5.$$

Из (8) при конечных значениях x_4, y_4 получим

$$\lim_{z_4 \to \infty} k_{\min}^2 = 1 + \frac{3a_{21}^2 a_{31}^2 a_{32}^2}{4F_4^2 (a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2)}. \tag{11}$$

При этом $k_{\min}$ зависит лишь от формы основания. Исследуя (11) на минимум, по аналогии с [2] находим $\lim\limits_{z_4 \to \infty} k_{\min\,\min}^2 = 7/3$ при основании в форме правильного треугольника.

Если в (8) $c = 0$, т. е. вершина T_4 проектируется на одну из вершин основания, то

$$\lim_{z_4 \to 0,\ c=0} k_{\min}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_{31}^2 a_{21}^2}{F_4^2}\right). \tag{12}$$

Исследуя (12) на минимум, получаем $\lim\limits_{z_4 \to 0,\ c=0} k_{\min\,\min}^2 = 2{,}5$ при основании в форме прямоугольного треугольника, при этом вершина проектируется на пересечении катетов.

При выборе исходной пирамиды следует придерживаться правила: одна из граней (основание) должна стремиться по форме к правильному треугольнику, а вершина, не входящая в данную

грань, должна, по возможности, проектироваться ближе к пересечению медиан основания и быть, по возможности, удаленной от основания.

Для практического применения засечки по четырем пунктам укажем геометрическое место определяемых пунктов, для которых $m \leqslant m_{доп}$, где $m_{доп}$ — допустимая погрешность определения пунктов.

Подставляя $x = x_M$, $y = y_M$, $z = z_M$, $m_0 = m_{доп}$ в (3) и рассматривая (3) как уравнение сферы, получаем

$$R_{доп} = 3V \sqrt{\frac{(m_{доп} / m_s)^2 - k^2_{min}}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2}},$$

где $R_{доп}$ — радиус шара с центром в точке $O(x_M, y_M, z_M)$, для которого справедливо отношение $m \leqslant m_{доп}$. Этот шар — допустимая область проведения измерений.

Полученные формулы проверены на данных экспериментальной сети, созданной в Западных Татрах [3]. Сеть состоит из пяти пунктов, удаленных друг от друга в среднем на 2 км, с перепадом высот 500 м. На пунктах сети измерены горизонтальные направления, зенитные расстояния и все длины сторон сети светодальномером Kern ME 3000. Сеть уравнена как свободная в 11 вариантах с разным составом измерений и разными весами. Наивысшая точность достигнута в 4—5 вариантах, когда в уравнивание включались измеренные стороны, зенитные расстояния и горизонтальные направления. Представляя пункт 3а как определяемый, вычисляли его координаты по четырем остальным как исходным через соответствующие измеренные расстояния. Результаты проверки приведены в таблице.

Сравнение результатов определения пункта 3а экспериментальной сети

Наименование координат	Координаты, м			Погрешности определения, мм		
	пункта 3а		точки минимума погрешностей	полученные для пункта 3а	предвычисленные (m_s = 2,6 мм)	
	исходного	определяемого			для пункта 3а (определяемого)	в точке минимума погрешностей ($R_{доп}$ = 5640,6 м)
z	0,009	0,009	92,6	0	—	—
y	0,000	0,000	—785,9	0	—	—
x	0,010	0,022	630,9	12,0	—	—
Местоположение пункта	—	—	—	12,0	14,5	11,6

Анализ данных таблицы показывает высокую точность определяемый, вычисляли его координаты по четырем остальным как вать ее при создании геодезических сетей в горных районах.

1. *Нинбург Т. А.* Решение пространственной линейной засечки. Л., 1985. 5 с. (Рукопись деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 26. 08. 85, № 184 гд-85 Деп.). 2. *Саняк З. Р., Ковалив И. И.* Точность линейной засечки по трем исходным пунктам и точка Лемуана // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 43. С. 82—86. 3. *Hradilek L., Loulova A., Blažek M.* Vysokohorské sítě definované měřenymi délkami // Geodetický a kartografický obzor. Ročnik. 1986. Т. 32. № 3. S. 53—56.

Статья поступила в редколлегию 06. 02. 87