УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ НЕСВОБОДНЫХ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Имеющиеся формулы для предрасчета точности сплошных трилатерационных построений выведены для свободных сетей [1—5, 8]. Наличие избыточных исходных данных существенно изменяет в сети закономерности накопления погрешностей. Поэтому качественный предрасчет точности несвободных сетей, которые обычно создаются на практике, невозможно выполнить с помощью формул, полученных для свободных сетей.

В несвободных сетях трилатерации изучены только закономерности накопления погрешностей дирекционных углов и выведены формулы для их оценки [7]. Формул для оценки точности пунктов сплошных несвободных сетей трилатерации нет.

Результаты оценки точности пунктов несвободных трехкратных рядов трилатерации приведены в [6]. Вывод формул оказался трудоемким, а формулы получились громоздкими. Увеличение числа рядов в сети усложнит такие исследования.

Обратные веса сдвигов пунктов несвободных построений являются функциями двух параметров. Один из них характеризует расстояние между исходными пунктами или число фигур между ними. Если исходные пункты находятся на краях сети, то он характеризует размер сети. Второй, параметр обусловлен положением в сети оцениваемого пункта. Если проводить оценку точности пункта, занимающего какое-то определенное положение в сети, то обратные веса его сдвигов будут функциями лишь одного параметра, характеризующего размер сети.

Геодезистов при проектировании сетей обычно интересуют ошибки наиболее слабых элементов. Поэтому желательно иметь формулы для предрасчета точности наиболее слабых пунктов несвободных сетей трилатерации.

Исследование точности дирекционных углов в несвободных сетях трилатерации выполнено на макетах сетей, состоящих из трех, пяти и семи рядов равносторонних треугольников с четырьмя исходными пунктами, расположенными по углам сетей, и двумя исходными дирекционными углами (см. рис. 1—3 в [7]). Конфигурация макетов сетей выбиралась такой, чтобы в каждом двухкратном ее ряде было одинаковое число центральных систем, обозначенное N. Это число, наряду с числом рядов, характеризует размер сети. На таких же макетах несвободных сетей трилатерации проведена оценка точности наиболее слабых пунктов.

В рассматриваемых сетях при $n>N$, где n — число рядов треугольников, наиболее слабые пункты находятся на середине крайних диагоналей первого сверху и самого нижнего рядов треугольников. Их ошибки на 2...3% больше ошибок пунктов, расположенных на середине диагоналей, находящихся в середине сети. Ошибка положения наиболее слабого пункта верхней и нижней крайних диагоналей практически одинакова. Поэтому мы ограничимся оценкой точности пункта, расположенного на середине верхней крайней диагонали исследуемых сетей.

Исследования проведем коррелатным способом. В рассматриваемых сетях возникает $N(n-1)+7$ условных уравнений. В их число входит $N(n-1)=\gamma$ условий центральных систем, шесть условий координат и одно условие дирекционных углов. При составлении условий координат примем, что ряды треугольников сетей, а значит, и их диагонали, ориентированы вдоль оси ординат.

Точность положения оцениваемого пункта в сетях характеризуется ошибками координат, которые благодаря принятому ориентированию сетей равны поперечному и продольному сдвигам. Весовые функции абсциссы и ординаты оцениваемого пункта присоединены к системе условных уравнений всех макетов сетей.

Применительно к нашим сетям формулу обратного веса функции уравненных сторон запишем так:

$$\frac{1}{P}=[ff]-\sum_{i=1}^{\nu} H_i-\sum_{i=\nu+1}^{\nu+7} H_i, \tag{1}$$

где $[ff]$ — квадратичный член весовой функции; H_i — величина, вносимая в обратный вес i-м условным уравнением.

Если исследуемые сети были бы свободными, то в них возникало бы лишь ν условий центральных систем и обратный вес функции уравненных сторон имел бы вид

$$\frac{1}{P_{\text{св}}}=[ff]-\sum_{i=1}^{\nu} H_i. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{P_{\text{св}}}-\sum_{i=\nu+1}^{\nu+7} H_i=\frac{1}{P_{\text{св}}}-\sum_{j=1}^{7} H_j. \tag{3}$$

Здесь $j=i-\nu$.

В проведенных нами ранее исследованиях получены формулы обратных весов сдвигов пунктов свободных сетей [3, 5]. Поэтому для вывода формул обратных весов сдвигов в несвободных сетях необходимо найти закономерности образования величин H_j, вносимых в обратный вес уравнениями жесткости. Величины

$$H_j = h_j^2 / g_j. \tag{4}$$

Величины h_j и g_j определяются такими выражениями в алгоритмах Гаусса

$$h_j = [r_{\nu+j} f \cdot (\nu + j - 1)], \quad g_j = [r_{\nu+j} \cdot (\nu + j - 1)], \tag{5}$$

где $j = 1 \ldots 7$; $r_{\nu+j}$ — коэффициенты $\nu+j$ условного уравнения; f — коэффициенты весовой функции. Закономерности образования величин h_j и g_j найдем путем раскрытия алгоритмов Гаусса. А зная их, нетрудно найти закономерности образования величин и их сумму.

Вначале рассмотрим сеть из трех рядов треугольников. Для преобразованных квадратичных членов уравнений жесткости получим такие выражения: $g_1 = 9{,}827$; $g_2 = 5{,}607$; $g_3 = 0{,}700\,N + 0{,}314$;

$$g_4 = 0{,}138\,142\,N^3 + 4{,}1505\,N^2 + 4{,}505\,N + 3{,}308; \quad g_5 = -0{,}0043\,N^2 + 0{,}627\,N + 0{,}534; \quad g_6 = 0{,}029\,758\,N^3 + 0{,}5649\,N^2 - 2{,}189\,N + 13{,}115; \quad g_7 = 0{,}000\,27\,N^2 - 0{,}012\,N + 0{,}148. \tag{6}$$

Выражения преобразованных неквадратичных членов весовой функции ординат (продольного сдвига) пункта, расположенного на середине верхней крайней диагонали, имеют вид $h(y)_1 = -0{,}934$;

$$h(y)_2 = 0{,}372; \quad h(y)_3 = -0{,}100\,N + 0{,}040; \quad h(y)_4 = 0{,}0318\,N^2 - 0{,}039\,N - 0{,}010; \quad h(y)_5 = 0{,}296\,N + 0{,}680; \quad h(y)_6 = -0{,}0406\,N^2 - 0{,}451\,N + 2{,}223; \quad h(y)_7 = 0{,}0001\,N^2 - 0{,}0057\,N + 0{,}083 \tag{7}$$

и весовой функции абсцисс — $h(x)_1 = 1{,}986\,N + 2{,}852$; $h(x)_2 = 2{,}048$;

$$h(x)_3 = 0{,}0434\,N^2 + 0{,}010\,N - 0{,}044; \quad h(x)_4 = 0{,}008\,997\,N^3 + 0{,}0327\,N^2 + 0{,}734\,N + 0{,}178; \quad h(x)_5 = -0{,}0402\,N^2 - 0{,}029\,N - 0{,}336; \quad h(x)_6 = 0{,}008\,592\,N^3 + 0{,}1761\,N^2 - 0{,}658\,N + 3{,}840; \quad h(x)_7 = -0{,}000\,165\,N^2 + 0{,}0083\,N - 0{,}130. \tag{8}$$

Полученные закономерности проверяли путем сравнения значений преобразованных квадратичных членов уравнений жесткости и неквадратичных членов соответствующих этим уравнениям весовых функций из решения систем нормальных уравнений на ЭВМ и по формулам (6)—(8). Проверка проведена для трехкратных рядов с разными N. В табл. 1 даны результаты проверки для трехкратных рядов с $N = 9, 17$ и 25. Материалы проверки показали хорошую сходимость значений g_j и h_j, вычисленных по формулам и на ЭВМ.

Подставляя соответствующие значения g_j и h_j в (4), легко получить значения величин, вносимых в обратный вес уравнениями жесткости.

Обратные веса продольного и поперечного сдвигов пункта $k = (N+1)/2$ верхней крайней диагонали свободного трехкратного ряда получаем, подставляя в ранее выведенные формулы значение k:

$$\frac{1}{P_{y, \text{св}}} = 0{,}35\,N + 0{,}65, \tag{9}$$

$$\frac{1}{P_{x, \text{св}}} = 0{,}011\,147\,N^3 + 0{,}4167\,N^2 + 1{,}612\,N + 2{,}303.$$

Таблица 1

Преобразованные квадратичные члены уравнений жесткости и соответствующие им преобразованные элементы векторов координат пунктов трехкратного ряда

Элементы матрицы	$N=9$		$N=17$		$N=25$	
	строго	по формуле	строго	по формуле	строго	по формуле
g_1	9,827	9,83	9,827	9,83	9,827	9,83
g_2	5,607	5,61	5,607	5,61	5,607	5,61
g_3	6,614	6,61	12,214	12,21	17,813	17,81
g_4	480,74	480,75	1958,087	1958,08	4868,461	4868,46
g_5	5,854	5,82	9,930	9,95	13,536	13,52
g_6	61,330	60,86	285,057	285,35	776,252	776,40
g_7	0,061	0,06	0,018	0,02	0,009	0,01
$h(y)_1$	—0,932	—0,93	—0,934	—0,93	—0,934	—0,93
$h(y)_2$	0,370	0,37	0,372	0,37	0,372	0,37
$h(y)_3$	—0,860	—0,86	—1,660	—1,66	—2,460	—2,46
$h(y)_4$	2,231	2,21	8,512	8,52	18,897	18,89
$h(y)_5$	3,326	3,34	5,729	5,71	8,065	8,08
$h(y)_6$	—5,209	—5,12	—17,245	—17,18	—34,334	—34,43
$h(y)_7$	0,041	0,04	0,019	0,02	0,011	0,01
$h(x)_1$	20,721	20,72	36,608	36,61	52,492	52,49
$h(x)_2$	2,028	2,05	2,048	2,05	2,071	2,05
$h(x)_3$	3,559	3,56	12,678	12,68	27,343	27,34
$h(x)_4$	15,998	15,99	66,295	66,30	179,515	179,54
$h(x)_5$	—3,887	—3,85	—12,424	—12,44	—26,199	—26,19
$h(x)_6$	18,581	18,45	85,668	85,76	231,635	231,70
$h(x)_7$	—0,069	—0,07	—0 ,036	—0,04	—0,024	—0,03

Теперь у нас имеются все величины, входящие в (3) обратного веса функций ординат и абсцисс оцениваемого пункта. После несложных преобразований находим

$$\frac{1}{P_{y, \text{з}}} = 0{,}0008\,N^2 + 0{,}0556\,N + 0{,}68;$$

$$\frac{1}{P_{x, \text{з}}} = 0{,}001\,414\,N^3 - 0{,}0014\,N^2 + 0{,}233\,N + 0{,}53. \tag{10}$$

Теперь средние квадратические ошибки координат наиболее слабого пункта несвободного трехкратного ряда трилатерации можем определять по формулам

$$m_{x, \text{з}} = \mu \sqrt{0{,}001414\,N^3 - 0{,}0014\,N^2 + 0{,}233\,N + 0{,}53}; \tag{11}$$

$$m_{y, \text{з}} = \mu \sqrt{0{,}0008\,N^2 + 0{,}0556\,N + 0{,}68.} \tag{12}$$

Таким же путем проведена оценка точности наиболее слабого пункта несвободной сети трилатерации из пяти рядов и получены такие формулы:

$$m_{x,5} = \mu \sqrt{0{,}000\,759\,N^3 - 0{,}0177\,N^2 + 0{,}402\,N - 0{,}32}; \quad (13)$$

$$m_{y,5} = \mu \sqrt{-0{,}0005\,N^2 + 0{,}074\,N + 0{,}58}. \quad (14)$$

А для сети из семи рядов треугольников

$$m_x = \mu \sqrt{0{,}000\,380\,N^3 - 0{,}0098\,N^2 + 0{,}229\,N + 0{,}66}; \quad (15)$$

$$m_y = \mu \sqrt{-0{,}00085\,N^2 + 0{,}074\,N + 0{,}67}. \quad (16)$$

Таблица 2

Результаты проверки формул

N	n=3				n=5				n=7			
	m_x		m_y		m_x		m_y		m_x		m_y	
	На ЭВМ	По [11]	На ЭВМ	По [12]	На ЭВМ	По [13]	На ЭВМ	По [14]	На ЭВМ	По [15]	На ЭВМ	По [16]
5	1,4	1,4	0,9	1,1	1,3	1,2	0,9	1,0	1,3	1,3	1,0	1,0
9	1,9	1,9	1,1	1,1	1,6	1,6	1,1	1,1	1,5	1,5	1,1	1,1
10	2,0	2,0	1,1	1,1	1,6	1,6	1,1	1,1	1,5	1,5	1,2	1,2
15	2,9	2,9	1,3	1,3	2,1	2,1	1,3	1,3	1,8	1,8	1,3	1,3
17	3,3	3,3	1,4	1,4	2,3	2,3	1,3	1,3	1,9	1,9	1,3	1,3
20	4,0	4,0	1,5	1,5	2,6	2,6	1,4	1,4	2,1	2,1	1,3	1,3
25	5,2	5,2	1,6	1,6	3,2	3,2	1,5	1,5	2,5	2,5	1,4	1,4

Выведенные формулы для оценки наиболее слабых пунктов проверены путем сравнения ошибок координат средних пунктов крайней диагонали несвободных сетей с $N=5$, 9, 10, 15, 17, 20 и 25, вычисленных коррелатным способом на ЭВМ и по выведенным формулам. Результаты проверки сведены в табл. 2. Они показали, что все формулы дают практически точные результаты при $N \geqslant 5$.

Воспользуемся данными табл. 2 для анализа влияния количества рядов в сети на точность их наиболее слабых пунктов. Как видим, увеличение числа рядов в сети влечет за собой уменьшение ошибок абсцисс или их поперечных сдвигов. На ошибки ординат или продольные сдвиги количество рядов в сети практически не влияет.

Уменьшение поперечных сдвигов наиболее слабых пунктов с увеличением количества рядов в сети постепенно замедляется. Так, переход от трех до пяти рядов в сетях с $N=10$ вызывает уменьшение поперечного сдвига наиболее слабых пунктов на 25%, а переход от пяти до семи рядов — на 7%. В сетях с $N=25$ такие же переходы вызывают уменьшение поперечных сдвигов соответственно на 63 и 28%. Поэтому можно предположить, что дальнейшее увеличение числа рядов повлечет за собой меньшие изменения, чем при переходе от пяти до семи рядов. На основании этого формулы (16) и (15), выведенные для оценки точности наиболее слабых пунктов несвободных семикратных рядов, можно рекомендовать как приближенные для предрасчета точности наиболее слабых пунктов сплошных несвободных сетей трилатерации. При этом их погрешность при $N \leqslant 10$ не будет превышать 10%, а при $10 \leqslant N \leqslant 25 \ldots 20\%$.

1. *Виленский В. А.* О закономерностях накопления погрешностей в сплошных сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979. Вып. 30. С. 41—48. 2. *Заводовский А. В.* Оценка точности линейных триангуляций // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. геодез. 1959. № 5. С. 3—33. 3. *Костецкая Я. М.* К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1967. Вып. 6. С. 25—42. 4. *Костецкая Я. М.* О точности дирекционных углов в сплошных сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1974. Вып. 20. С. 45—50. 5. *Костецкая Я. М.* Поперечный сдвиг пунктов в сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1978. Вып. 28. С. 52—57. 6. *Костецкая Я. М.* Оценка точности несвободных рядов трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1978. Вып. 28. С. 58—67. 7. *Костецкая Я. М.* О точности дирекционных углов в несвободных сетях трилатерации // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 43. С. 41—47. 8. *Проворов К. Л.* Точность элементов сети линейной триангуляции // Тр. НИИГАиК. 1968. Т. 11. С. 56—64.

Статья поступила в редколлегию 10. 12. 86