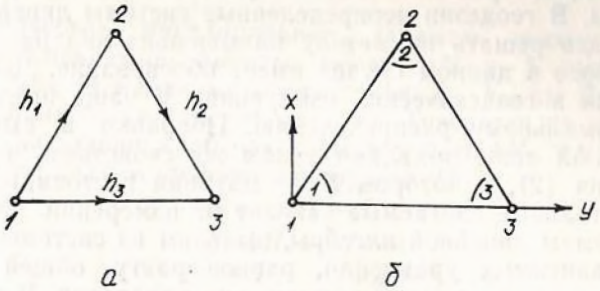
УДК 528.14/16

*И. Ф. МОНИН*

# К ПАРАМЕТРИЧЕСКОМУ УРАВНИВАНИЮ СВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Обрабатывая результаты повторных нивелирований, целесообразно рассматривать сеть геометрического нивелирования как свободную, без исходных реперов, так как невозможно найти на территории исследуемого объекта подходящего репера, определенного без ошибок и не подверженного смещениям. Уравнивая сеть, необходимо находить поправки к высотам всех реперов (и к тем, которые могут быть исходными). Так следует поступать




Геодезические сети нивелировки (*а*) и триангуляции (*б*).

при обработке повторных нивелирований, изучая колебательные движения земной коры, а также при построении специальных геодезических сетей на геодинамических полигонах.

Рассмотрим применение теории параметрического уравнивания свободных сетей к обработке нивелирований и триангуляций на простейших примерах. Напишем нормальные уравнения параметрического метода

$$B^{\tau}B\delta X+B^{\tau}L=0, \qquad (1)$$

где $B$ — прямоугольная матрица коэффициентов уравнений поправок

$$B\delta X+L=V; \qquad (2)$$

$\delta X$ — столбцевая матрица поправок в высоты или в плоские координаты пунктов сети; $L$ — матрица свободных членов; $V$ — матрица поправок в измеренные величины (превышения или углы); $\tau$ — символ транспортирования матриц.

Если размер столбцевой матрицы $\delta X$ в высотных сетях равен $n-1$, а в плановых $2n-4$, где $n$ — количество пунктов в сети, то система нормальных уравнений (1) имеет единственное решение и никаких затруднений вычислительного характера не возни-

кает. Если же размер матрицы $\delta X$ в высотных сетях равен $n$, а в плановых $2n$, то система (1) неопределенна. Действительно, всегда координаты определяемых пунктов можно аналитически выразить через координаты исходных пунктов и измеренные величины. Следовательно, поправки в координаты всех пунктов в геодезической сети всегда линейно зависимы между собой. А это приводит к тому, что определитель матрицы $B^{\tau}B$ системы (1) равен нулю. Таким образом, ранг матрицы $B^{\tau}B$ в этом случае меньше ее порядка. Он равен, как легко установить, $n-1$ в высотных сетях и $2n-4$ — в плановых.

Согласно теории решения линейных уравнений, в случае, когда ранг матрицы коэффициентов при неизвестных не совпадает с ее порядком, неопределенная совместная система (1) имеет множество решений, которые можно найти различными методами линейной алгебры. В геодезии неопределенные системы линейных уравнений принято решать по методу наименьших квадратов, применение которого в данном случае имеет обоснование. Действительно, поправки в геодезических измерениях $V$ чаще всего удовлетворяют нормальному распределению. Поправки в вычисляемые координаты $\delta X$ тоже обладают таким же свойством, что следует из уравнения (2), в котором $B$ — матрица постоянных коэффициентов, остальные слагаемые зависят от измерений. Стало быть, следуя приемам линейной алгебры, выделим из системы (1) количество независимых уравнений, равное рангу общей матрицы $B^{\tau}B$, и решим их по методу наименьших квадратов. В результате получим единственное решение системы (1). Чтобы удобнее из общей системы (1) выбирать количество уравнений, равное рангу общей матрицы $B^{\tau}B$, разделим поправки в координаты на две матрицы: $\delta X$ — в определяемые пункты и $\delta M$ — в исходные. Уравнение поправок (2) запишем в форме

$$B\delta X+B_{\mu}\delta M+L=V. \tag{3}$$

Решая (3) по методу наименьших квадратов, получим нормальные уравнения (если надо, можно вводить веса измерений или корреляционную матрицу):

$$B^{\tau}B\delta X+B^{\tau}B_{\mu}\delta M+B^{\tau}L=0, \tag{4}$$

$$B_{\mu}^{\tau}B\delta X+B_{\mu}^{\tau}B_{\mu}\delta M+B_{\mu}^{\tau}L=0. \tag{5}$$

Система уравнений (4) и (5) принципиально не отличается от системы (1). Определитель матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c} B^{\tau}B & B^{\tau}B_{\mu} \\ \hline B_{\mu}^{\tau}B & B_{\mu}^{\tau}B_{\mu} \end{array}\right)$$

равняется нулю, так как строки этой матрицы линейно зависимы между собой, в чем нетрудно убедиться. Ранг этой матрицы равен рангу матрицы $B^{\tau}B$. Поэтому из системы уравнений (4) и (5) выбираем систему (4) и решаем ее по методу наименьших квадратов, зная, что поправки в координаты распределены нормально

и удовлетворяют уравнению (4). Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = \delta X^{\tau} \delta X + \delta M^{\tau} \delta M - 2K^{\tau} (B^{\tau} B \delta X + B^{\tau} B_{\mu} \delta M + B^{\tau} L),$$

где $K$ — матрица коррелат.

Исследуя $\Phi$ на экстремум, получаем решение и корреляционные матрицы:

$$\delta X = -B^{\tau} B N^{-1} B^{\tau} L, \tag{6}$$

$$\delta M = -B_{\mu}^{\tau} B N^{-1} B^{\tau} L, \tag{7}$$

$$N = B^{\tau} B \cdot B^{\tau} B + B^{\tau} B_{\mu} \cdot B_{\mu}^{\tau} B, \tag{8}$$

$$Q_{\delta X} = B^{\tau} B N^{-1} B^{\tau} \cdot B N^{-1} B^{\tau} B, \tag{9}$$

$$Q_{\delta M} = B_{\mu}^{\tau} B N^{-1} B^{\tau} \cdot B N^{-1} B^{\tau} B_{\mu}, \tag{10}$$

где $Q_{\delta X}$, $Q_{\delta M}$ — корреляционные матрицы (без постоянного множителя) поправок в координаты. Приведем вычислительные примеры.

**Геометрическое нивелирование.** Примем высоту репера 1 $H_1 = 0$, приближенные высоты реперов 2 и 3 соответственно $H_2 = h_1$, $H_3 = h_3$. Измеренные превышения: $h_1$, $h_2$, $h_3$. Длины ходов считаем одинаковыми (см. рисунок, *а*). Требуется из уравнивания определить поправки к абсолютным высотам $\delta H_1$, $\delta H_2$, $\delta H_3$ и их точность. Составляем уравнения поправок (2):

$$V_1 = \delta H_2 - \delta H_1,$$

$$V_2 = \delta H_3 - \delta H_2 + l_2,$$

$$V_3 = \delta H_3 - \delta H_1, \qquad l_2 = h_3 - h_2 - h_1.$$

Нормальные уравнения (1) принимают вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -l_2 \\ l_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{11}$$

Легко подсчитать определитель матрицы при поправках в высоты. Он равен нулю. Так и должно быть, потому что ранг этой матрицы, как нетрудно установить, равен двум. Приводим вычисления по формулам (6)—(10):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B^{\tau} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^{\tau} B_{\mu} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$N = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \delta X = -\frac{1}{3} B^{\tau} L,$$

$$\delta M = \frac{1}{3} (11) B^{\tau} L.$$

$$Q_{\delta X} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_{\delta M} = \frac{2}{9}.$$

При вычислениях было принято: $\delta X = \begin{pmatrix} \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{pmatrix}$, $\delta M = \delta H_1$.

**Триангуляция.** Рассмотрим сеть триангуляции из одного равностороннего треугольника, в котором измерены с одинаковой точностью углы 1, 2, 3 (см. рисунок, *б*). Примем $x_1 = y_1 = 0$, $a_{13} = 1$, $A_{13} = 90°$, где координаты пункта 1, длина стороны и дирекционный угол даны без ошибок. Требуется определить поправки в координаты всех трех пунктов ($\varepsilon_1\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2$, $\varepsilon_3\eta_3$). Составим уравнения поправок (2):

$$V_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2 - \varepsilon_3 + 0\cdot\eta_3,$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{\sqrt{3}\eta_1}{2} - \varepsilon_2 + 0\cdot\eta_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_3 + l_2,$$

$$V_3 = -1\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\eta_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_3,$$

$$l_2 = 180° - (1 + 2 + 3).$$

Нормальные уравнения (1) запишем так:

$$\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \eta_1 \\ \varepsilon_2 \\ \eta_2 \\ \varepsilon_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} l_2 \\ -\sqrt{3}\,l_2 \\ -2\,l_2 \\ 0 \\ l_2 \\ \sqrt{3}\,l_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Как видно, ранг матрицы при поправках в координаты равен двум, определитель матрицы, как и должно быть, равен нулю. Выполняем вычисления по формулам (6)—(10):

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$B^{\tau}B=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\quad B^{\tau}_{\mu}B=\frac{3}{4}\begin{vmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\\-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{vmatrix}$$

$$N=\frac{27}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad N^{-1}=\frac{4}{27}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \delta X=-\frac{2}{9}B^{\tau}L,$$

$$\delta M=-\frac{1}{9}\begin{vmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\\-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{vmatrix}\cdot B^{\tau}L,$$

$$Q_{\delta X}=\frac{2}{27}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad Q_{\delta M}=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}2&0&-1&\sqrt{3}\\0&2&-\sqrt{3}&-1\\-1&-\sqrt{3}&2&0\\\sqrt{3}&-1&0&2\end{vmatrix}$$

$$\delta X^{\tau}=(\varepsilon_2\eta_2),\ \delta M^{\tau}=(\varepsilon_1\eta_1,\ \varepsilon_3\eta_3).$$

Отметим, что параметрическое уравнивание свободных геодезических сетей (или уравнивание с вырожденной матрицей нормальных уравнений) выполняют еще при помощи псевдообратных матриц или обобщенных обратных матриц. Этим методам посвящены многочисленные работы Ю. И. Маркузе, С. И. Матвеева, И. Е. Рабиновича, В. А. Бывшева и др. Изложенный здесь подход наиболее естественный: он отображает геодезическую сущность уравнивания и менее объемист в вычислительном плане.

Статья поступила в редколлегию 22. 10. 86