УДК 528.11+519.654

ДО ПИТАННЯ ВРАХУВАННЯ КОВАРІАЦІЙНОЇ МАТРИЦІ ПОМИЛОК ПРИ ОБРОБЦІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

© Согор А. Р., Марченко О. М., 1999

ДУ "Львівська політехніка"

Выполнено преобразование, дающее возможность представить задачу решения системы нормальных уравнений в равноточном виде для случая полной ковариационной матрицы ошибок измерений.

The transformation lets the possibility to represent the problem of solving system of the normal equations in the equivalent appearence, for the case of the full error covariance matrix, have been performed.

Із багатьох різноманітних критеріїв для визначення невідомих величин X із системи параметричних рівнянь

$$AX + L = V \tag{1}$$

найчастіше використовують принцип найменших квадратів: на розв'язок системи (1) накладається додаткова умова

$$\Phi = V^T C_{nn}^{-1} V = min, \tag{2}$$

де C_{nn}^{-1} – обернена коваріаційна матриця помилок вимірів.

Підставимо у формулу (2) замість вектора V його значення із (1). Тоді одержимо:

$$\Phi = (AX + L)^T C_{nn}^{-1} (AX + L) = min. \tag{3}$$

Розкриваючи в (3) дужки, будемо мати:

$$\Phi = X^T A^T C_{nn}^{-1} AX + 2X^T A^T C_{nn}^{-1} L + L^T C_{nn}^{-1} L = min. \tag{4}$$

Як відомо, для виконання умови (4) необхідно, щоб $\partial\Phi/\partial X = 0$. В результаті одержуємо систему нормальних рівнянь:

$$A^T C_{nn}^{-1} A \cdot X = -A^T C_{nn}^{-1} L. \tag{5}$$

Врахування матриці C_{nn}^{-1} у процесі розв'язування системи нормальних рівнянь (5) методом послідовного виключення невідомих (методом Гаусса) як теоретично, так і на практиці не представляє жодних труднощів.

Але, при застосуванні методу сингулярного розкладу (який є універсальнішим, оскільки дає можливість одержувати стійкі розв'язки як добре, так і погано зумовлених систем) (див., наприклад, роботу [5]) розв'язок системи (5) має досить складний вираз.

З метою оперування простішими виразами одержання невідомих та їх оцінки точності, доцільно скористатися відомим у теорії математичної обробки геодезичних вимірів (див., наприклад, роботи [1], [2], [4]) поданням нерівноточних вимірів у рівноточному вигляді.

Для цього використаємо таку теорему [3]:

Для дійсної симетричної додатно визначеної матриці C_{nn}^{-1} *існує така симетрична додатно визначена матриця* $C_{nn}^{-1/2}$, *що* $\left(C_{nn}^{-1/2}\right)^2 = C_{nn}^{-1}$. *Причому* $\left(C_{nn}^{-1/2}\right)^2 = Y\Lambda^{1/2}Y^T \cdot Y\Lambda^{1/2}Y^T = Y\Lambda Y^T = C_{nn}^{-1}$, *де* $\Lambda^{1/2} = diag\left\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_m^{1/2}\right\}$ *– діагональна матриця власних чисел матриці* $C_{nn}^{-1/2}$, *а стовпці матриці* Y *– власні вектори* $C_{nn}^{-1/2}$.

Тоді рівняння (5) можна записати так:

$$A^T C_{nn}^{-1/2} C_{nn}^{-1/2} A \cdot X = -A^T C_{nn}^{-1/2} C_{nn}^{-1/2} L. \tag{6}$$

Позначивши

$$\underline{A}^T = A^T C_{nn}^{-1/2}; \quad \underline{A} = C_{nn}^{-1/2} A; \quad \underline{L} = C_{nn}^{-1/2} L, \tag{7}$$

формулу (6) запишемо так:

$$\underline{A}^T \underline{A} \cdot X = -\underline{A}^T \underline{L}. \tag{8}$$

Тепер виконаємо сингулярний розклад вже перетвореної матриці $\underline{A}$. Тобто

$$\underline{A} = \underline{U} \Sigma W^T, \tag{9}$$

де $\underline{U}$ – матриця з ортогональними стовпцями; W – ортогональна матриця; Σ – діагональна матриця сингулярних чисел. Для матриць $\underline{U}$ і W справедливі такі співвідношення:

$$\underline{U}^T \underline{U} = I; \quad \underline{U}\,\underline{U}^T \neq I; \tag{10}$$

$$W^T W = I; \quad W W^T = I, \tag{11}$$

де I – одинична матриця.

Підставивши рівняння (9) у формулу (8) і виконавши відповідні матричні перетворення та враховуючи властивості (10) і (11), отримаємо

$$X = -W\Sigma^{-1}\underline{U}^T \cdot \underline{L}. \tag{12}$$

Отже, рівняння (12) подане у вигляді досить простого виразу, який дає можливість отримати невідомі величини X, використовуючи сингулярний розклад матриці $\underline{A}$.

Неважко зауважити, що для часткового випадку, коли C_{nn}^{-1} буде діагональною, матриця Y (див. теорему) є одиничною, а діагональна матриця Λ власних чисел дорівнює матриці P ваг вимірів.

Отже, використовуючи перетворення (7), ми представили задачу розв'язування системи нормальних рівнянь у рівноточному вигляді, що дає можливість врахувати повну коваріаційну матрицю C_{nn} помилок вимірів та отримати простий вираз для знаходження невідомих X.

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений / Изд. 2-е, доп. М., 1977. 2. Кемниц Ю.В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. М., 1970. 3. Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. М., 1978. 4. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., 1958. 5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. М., 1980.