УДК 528. 21/22

ПОБУДОВА СІМЕЙСТВА ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ СПЕЦІАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

© Фоца Р.С., Абрикосов О.А., 1999
ДУ "Львівська політехніка"

Получены формулы, позволяющие практически реализовать построение семейства линейных потенциальных функций для апроксимации возмущающего потенциала.

The formulas have been obtained for the practical realization of the linear potential function set construction for approximation of disturbing gravity potential.

Для апроксимації гравітаційного потенціалу Землі у глобальному масштабі використовуються ортогональні базисні функції. При апроксимації гравітаційного поля в регіональному масштабі найбільше використання отримали неортогональні базисні функції. Наприклад, в [3,4] як неортогональні базисні функції використано систему точкових потенціальних функцій – потенціалів нецентральних радіальних мультиполів.

В [1] наведений спеціальний розв'язок рівняння Лапласа, який для нецентрального випадку запишеться так:

$$\widetilde{F} = \frac{1}{r_i} ln \frac{r_i + r_i \cos\varphi}{2r_i^2}, \qquad (1)$$

де r_i – відстань від точки i до біжучої точки P; φ – кут між напрямками Oi і iP з вершиною у точці i (рис. 1),

$$\cos\varphi = \frac{r\cos\psi - d_i}{r_i}, \qquad (2)$$

причому r – відстань від точки O до біжучої точки P; d_i – відстань від точки O до точки i; ψ – кут між напрямками OP і Oi з вершиною у точці O.

Функція $\widetilde{F}$ гармонічна у зовнішній області σ.

Оскільки збурюючий потенціал T – функція гармонічна, то для побудови системи базисних функцій для його апроксимації на основі спеціального розв'язку рівняння Лапласа (1) можна скористатись методом, описаним у [3,4]. Суть методу полягає у тому, *що якщо дано якийсь розв'язок рівняння Лапласа, то інші його розв'язки можуть бути* отримані з даного диференціюванням його по координатах. Згідно з роботою [3], для радіального випадку, таке диференціювання можна замінити диференціюванням за напрямком d_i.

Позначимо тепер через $\widetilde{Q}_n$ многочлен, отриманий диференціюванням n раз за напрямком d_i виразу (1):

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial d_i}\left[\frac{1}{r_i} ln \frac{r_i + r_i \cos\varphi}{2r_i^2}\right]. \tag{3}$$

Використавши формулу Лейбніца, вираз (3) можна записати так:

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n} C_n^m \frac{\partial^m}{\partial d^m}\left(ln\frac{r_i + r_i \cos\varphi}{2r_i^2}\right)\frac{\partial^{n-m}}{\partial d^{n-m}}\left(\frac{1}{r_i}\right), \tag{4}$$

де C_n^m – біноміальний коефіцієнт.

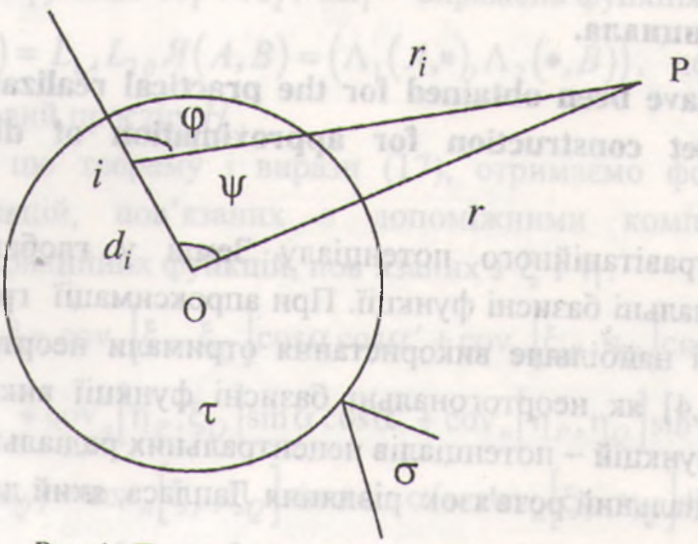

Рис.1. До пояснення елементів формул (1),(2)

Позначимо потенціал нецентрального радіального мультиполя нульового порядку через $V_0 = 1/r_i$, а через V_n – потенціал мультиполя n-го порядку. Тоді похідну n-го порядку від $1/r_i$ можна виразити так [2]:

$$\frac{\partial^n}{\partial d_i^n}\left(\frac{1}{r_i}\right) = \frac{\partial^n}{\partial d_i^n}(V_0) = n!V_n. \tag{5}$$

Для обчислення V_n використаємо рекурентну формулу, наведену у [2]:

$$nV_n = (2n-1)\frac{\cos\varphi}{r_i}V_{n-1} - (n-1)V_{n-2}\left(\frac{1}{r_i}\right)^2, \tag{6}$$

причому $V_n = 1/r_i$, а при $n < 0$ приймається $V_n = 0$.

Знайдемо тепер похідну n-го порядку від $ln\left[(r_i + r_i \cos\varphi)/2r_i^2\right]$:

$$\frac{\partial}{\partial d_i}\left(ln\frac{r_i + r_i \cos\varphi}{2r_i^2}\right) = \frac{2\cos\varphi - 1}{r_i} = 2\frac{1}{r_i}\cos\varphi - \frac{1}{r_i}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2}\left(ln\frac{r_i + r_i \cos\varphi}{2r_i^2}\right) = \frac{\partial}{\partial d_i}\left[2\frac{1}{r_i}\cos\varphi - \frac{1}{r_i}\right] = \frac{\partial}{\partial d_i}\left(2\frac{1}{r_i}\cos\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial d_i}\frac{1}{r_i}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial d_i^n}\left(ln\frac{r_i + r_i\,cos\varphi}{2r_i^2}\right) = 2\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial d_i^{n-1}}\left(\frac{1}{r_i}cos\varphi\right) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial d_i^{n-1}}\frac{1}{r_i}. \qquad (9)$$

Ще раз застосувавши формулу Лейбніца до виразу (9), отримаємо:

$$\frac{\partial^n}{\partial d_i^n}\left(ln\frac{r_i + r_i\,cos\varphi}{2r_i^2}\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial d^{n-1}}\left(\frac{1}{r_i}\right) + 2\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m\,\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial d^{n-m-1}}\left(\frac{1}{r_i}\right)\frac{\partial^m}{\partial d_i^m}cos\varphi. \qquad (10)$$

Похідна m-го порядку від $cos\varphi$ по d_i виражається за формулою

$$\frac{\partial^m}{\partial d_i^m}cos\varphi = m!\left[V_m r_i\,cos\varphi - V_{m-1}\right]. \qquad (11)$$

Введемо тепер позначення

$$L_n = \frac{\partial^n}{\partial d_i^n}\left(ln\frac{r_i + r_i\,cos\varphi}{2r^2}\right) \qquad (12)$$

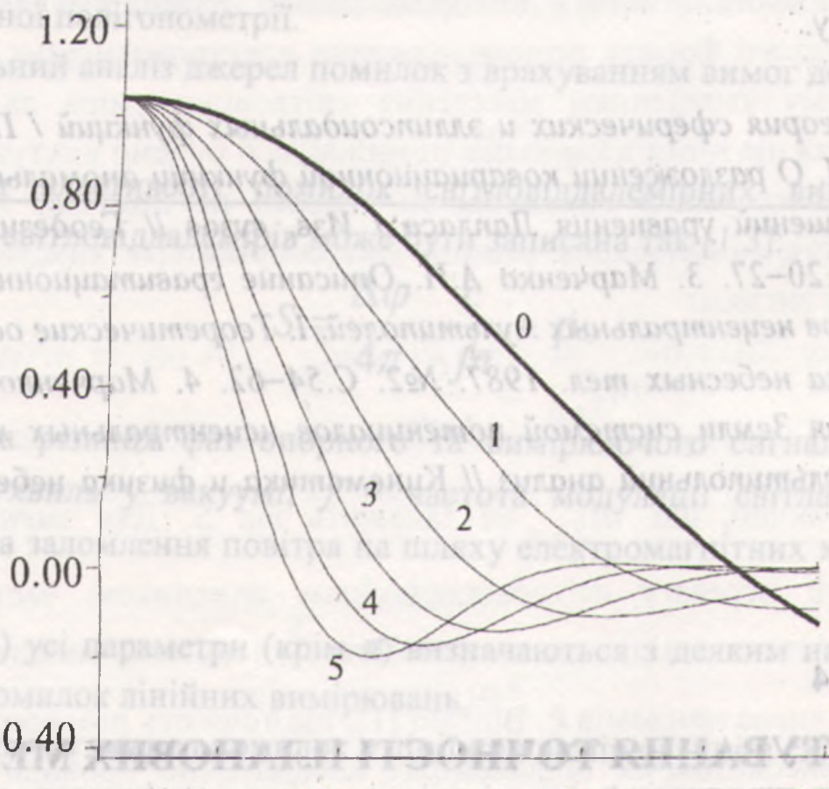

Рис.2. Графіки нормованих значень функцій $\tilde{Q}_n$ для n=0,1,...,5

Враховуючи, що

$$C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}, \qquad (13)$$

а також вирази (5) і (11), можемо записати вирази для обчислення L_n у такому вигляді:

$$L_0 = ln\frac{r_i + r_i\,cos\varphi}{2r_i^2}, \qquad (14)$$

а при $n > 0$

$$L_n = -(n-1)!V_{n-1} + 2\sum_{m=0}^{n-1}(n-1)!V_{n-m-1}\left[V_m r_i \cos\varphi - V_{m-1}\right]. \qquad (15)$$

Враховуючи формули (4),(5),(12), остаточний вираз для обчислення $\tilde{Q}_n$ будь-якого порядку n можна записати у такому вигляді:

$$\tilde{Q}_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}V_{n-m}L_m . \qquad (16)$$

У формулі (16) L_m обчислюється за формулами (14),(15), а V_{n-m} – за рекурентною формулою (6).

Графіки зміни нормованих значень функцій $\tilde{Q}_n$ для $n = 0,1,..5$ залежно від φ (при d_i=0.7) зображені на рис.2.

Отже, отримані формули дають змогу практично реалізувати побудову сімейства лінійних гармонічних функцій (3) для подальшого їх використання при апроксимації збурюючого потенціалу.

1. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Пер. с англ. М., 1952. 2. Марченко А.Н. О разложении ковариационной функции аномального поля в ряд фундаментальных решений уравнения Лапласа / Изв. вузов // Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. №4. С.20–27. 3. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. I. Теоретические основы метода // Кинематика и физика небесных тел. 1987. №2. С.54–62. 4. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. II. Предварительный мультипольний анализ // Кинематика и физика небесных тел. 1987. № 3. С.38–44.