

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Гравитационное поле Земли принято описывать коэффициентами C_{nm} , S_{nm} разложения его внешнего потенциала в ряд шаровых функций [7, 9]:

$$V = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi) \right]. \quad (1)$$

где fM — геоцентрическая гравитационная постоянная; r , φ , λ — геоцентрические сферические координаты точки; a_e — средний экваториальный радиус Земли; C_{nm} , S_{nm} — гармонические коэффициенты геопотенциала (стоксовы постоянные); $P_n^m(\sin \varphi)$ — присоединенная функция Лежандра степени n и порядка m ; N — максимальная степень и порядок разложения (степень разрешения поля).

Этот ряд в пространстве, внешнем относительно поверхности Земли, трактуется как ряд Фурье по системе шаровых функций [5, 7].

К настоящему времени по спутниковой и наземной геодезической информации создана серия глобальных моделей гравитационного поля высокой степени разрешенности, среди которых известны, например, такие модели как OSU-78 (1978), OSU-81 (1981), GEM-10C (1981) (все до 180-го порядка), GPM-2 (1985) (до 200-го порядка) и др. [15—18]. При их практическом использовании важное значение приобретают вычисления в конкретной точке поля численных его характеристик: потенциала или его производных, выражающих напряженность поля, уклонения отвеса и т. д. Эти вычисления сводятся к определению суммы ряда (1) или подобных выражений, получаемых его дифференцированием. Указанная сравнительно «элементарная» операция усложняется вследствие некоторых обстоятельств, из которых наиболее существенны следующие.

1. Ряд (1) является абсолютно и равномерно сходящимся вне сферы, объемлющей планету, а сходимости его на поверхности Земли и между последней и указанной сферой строго до сих пор еще не доказана [10], хотя на практике этот ряд используют и для указанных областей.

2. Коэффициенты ряда C_{nm} , S_{nm} получены по результатам наблюдений, т. е. являются приближенными числами, причем, начиная, например, с 50—70-го порядка, погрешности определения коэффициентов оказываются сравнимыми с их значениями.

Поэтому имеет смысл отвлечься от характера сходимости этих рядов и, принимая во внимание некорректность получения их сумм, привлечь к решению этой задачи методы обоб-

ценного суммирования. Тем более, что среди последних основными являются регулярные методы, т. е. такие, которые для сходящихся рядов приводят к строгому значению сумм как пределов частичных сумм этих рядов. Методы обобщенного суммирования давно уже используются в математике, а в последнее время к ним повышен интерес при решении некорректных задач вычислительной математики [12]. Они также стали проникать в задачи геодезического характера [3, 8].

Остановимся на использовании простейшего из этих методов — метода Фейера-Чезаро [4, 13, 14] применительно к суммированию ряда

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} v_i. \quad (2)$$

Как известно, частичные суммы рядов Фурье наилучшим образом «в среднем» описывают поведение исследуемой функции в ее области задания, но это еще не означает, что они хорошо представляют ее в отдельных точках области. Именно для этой цели введены суммы Фейера. Значения функции не обязательно получать как обычную сумму ряда, их можно определять и иным, более общим образом. Это и вызвало переход от обычного суммирования ряда функции к его суммированию по Фейеру—Чезаро. Идея метода заключается в использовании сглаживающих весов вида [14]

$$c(N, k) = \frac{N - k}{N} \quad (3)$$

для последовательных частичных сумм s_k данного ряда. Иначе говоря, суммирующую функцию берут в виде предела средних арифметических сумм данного ряда [4]

$$S(V) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^k v_i, \quad (4)$$

где v_i — члены ряда (2).

Нами (с участием аспиранта Н. Ф. Агеева) выполнен эксперимент в ряде точек геоида по вычислению сумм ряда (1) в трех вариантах с использованием модели геопотенциала GEM 10B [15], ограниченной, как известно, гармониками 36-го порядка и степени:

1) непосредственно по формуле (1);

2) методом Чезаро, понимая под частичными суммами суммы шаровых функций по порядкам

$$V_i = \sum_{n=2}^i v_n; \quad (5)$$

$$v_n = \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi), \quad i = 2, 3, \dots, N; \quad (6)$$

3) также по Чезаро, но с вычислением частичных сумм при последовательном добавлении очередной гармоники:

$$V_k = \sum_{i=0}^k a_i \varphi_i, \quad k=2, 3, \dots, (N^2 + 2N - 1); \quad (7)$$

$$a_i = \begin{cases} C_{n0} & \text{при } m=0 \\ C_{nm} & \text{при } m \neq 0 \\ S_{nm} & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (8)$$

причем $i = n^2 + 2m + l - 1$,

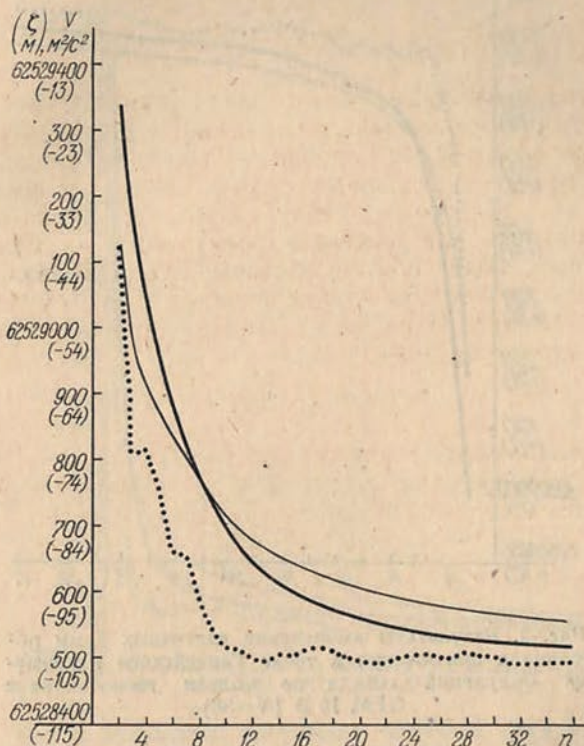


Рис. 1. Результаты вычисления частичных сумм потенциала притяжения в точке Индийского минимума ондуляций геоида по модели геопотенциала GEM 10 B ($N=36$).

$$\varphi_i = \Phi_{nm} = \frac{1}{r^{n+1}} \begin{cases} P_n(\sin \varphi) & \text{при } m=0, l=1 \\ P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda & \text{при } m \neq 0, l=1 \\ P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda & \text{при } m \neq 0, l=0 \end{cases} \quad (9)$$

На рис. 1, 2 отражены результаты выполненных вычислений в точках Индийского минимума ондуляций геоида ($\theta=85^\circ$, $\lambda=$

$= 79^\circ$ и высота геоида над эллипсоидом ($\zeta_m = -106$ м) и Гвинейского максимума их ($\theta = 93^\circ$, $\lambda = 145^\circ$, $\zeta_M = +77$ м).

Рис. 1, 2 хорошо иллюстрируют нерегулярный ход изменения частичных сумм в первом варианте счета, из чего следует, что пользоваться такой методикой не имеет смысла. Два оставшихся варианта характеризуются плавным видом графиков чезаровских сумм. Почти систематическое расхождение второго и третьего вариантов друг от друга объясняется, в первую

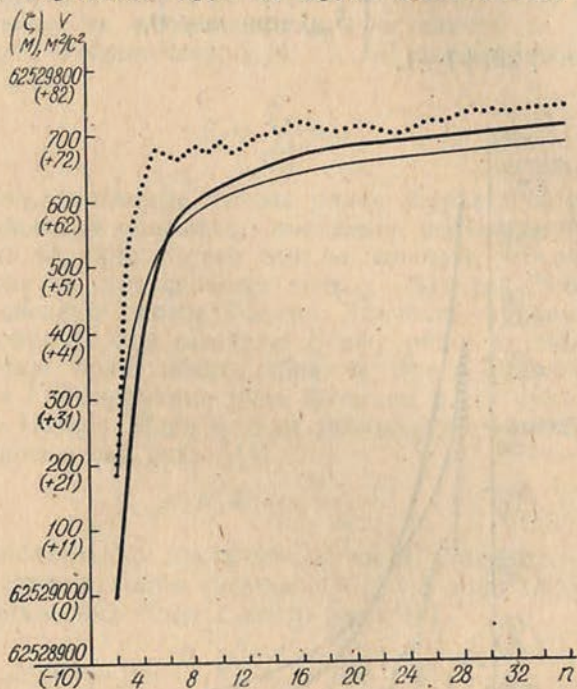


Рис. 2. Результаты вычисления частичных сумм потенциала притяжения в точке Гвинейского максимума ондуляций геоида по модели геопотенциала GEM 10 В ($N=36$).

очередь, нарушением основного принципа метода во втором варианте, когда при вычислении чезаровских сумм всем $(m+1)$ гармоникам порядка n и степени m приписывается один и тот же вес. Третий вариант уже свободен от этого недостатка, и он точно соответствует методу суммирования по Чезаро, при котором с увеличением порядка гармоник мы имеем строго монотонное стремление чезаровских сумм к их единственному пределу, т. е. к обобщенной сумме ряда (1) в данной точке.

* На рис. 1—4 обозначено: первый вариант счета; ————— второй вариант счета; ————— третий вариант счета.

В развитие выполненных исследований подсчитаны также чезаровские суммы, но уже с использованием модели OSU-81 180-го порядка в тех же самых точках (рис. 3, 4). На рис. 3, 4 отчетливо видно, что примерно при $N \sim 100$ графики чезаровских сумм выходят на асимптоту, т. е. мы получаем значение потенциала с точностью примерно $\pm 2 \text{ м}^2/\text{с}^2$, что соответствует в переводе на высоты геоида $\sim 20 \text{ см}$, а это, в свою очередь, отвечает в среднем точности спутниковой альтиметрии. Отсюда

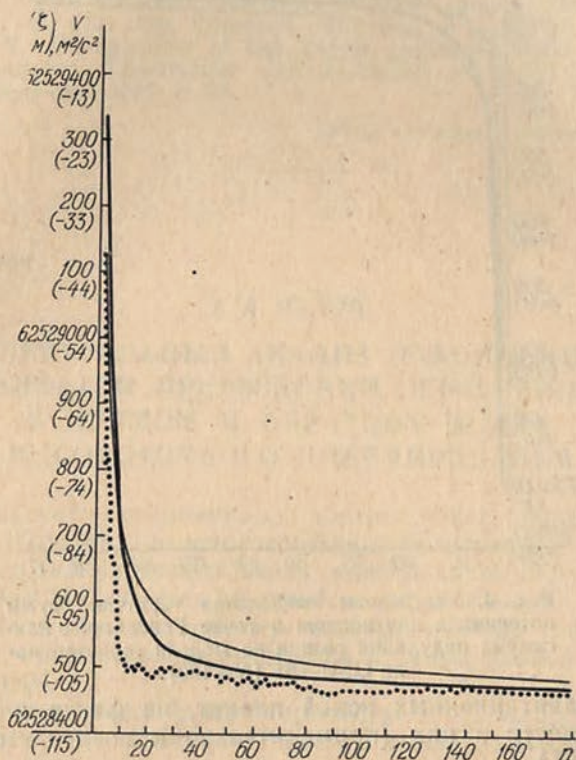


Рис. 3. Результаты вычисления частичных сумм потенциала притяжения в точке Индийского минимума ондуляций геоида по модели геопотенциала OSU-81 ($N=180$).

можно сделать вывод о том, что добавление гармоник геопотенциала более высоких степеней практически не оправдывает себя, т. е. дальнейшее увеличение модели не приводит уже к уточнению ее гармоник.

Предварительные исследования, описанные здесь, показывают, что пользоваться вычислением частичных сумм геопотенциала и его производных по классическим формулам теории, очевидно, не имеет смысла; при разработке всевозможных

методов улучшения сходимости таких рядов, вероятно, сначала их надо подвергать «чезаровской обработке».

«Чезаровская обработка» таких рядов приводит к обнадеживающим результатам и ее резонно использовать при исследовании

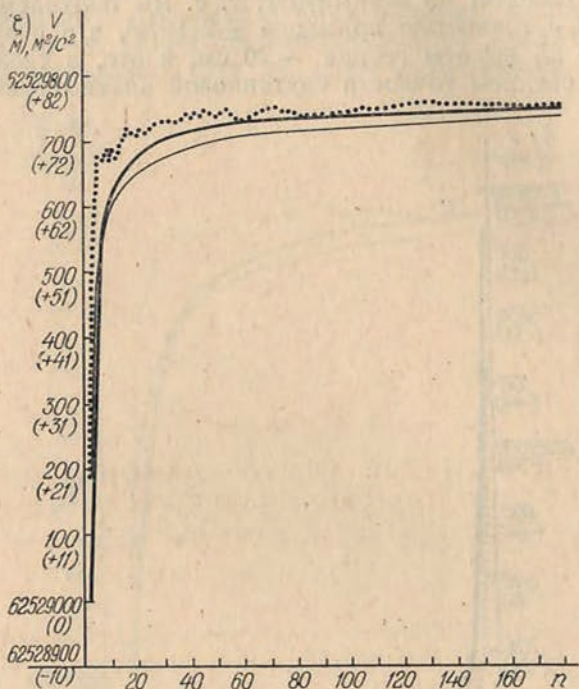


Рис. 4. Результаты вычисления частичных сумм потенциала притяжения в точке Гвинейского максимума ондуляций геоида по модели геопотенциала OSU—81 ($N=180$).

довании гравитационных полей планет, их фигур и распределения плотности в них (применительно к последнему это отражено в [6]).

1. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // Успехи математических наук. 1976. Т. 31. Вып. 6(102). С. 10—15. 2. Бузук В. В., Вовк И. Г., Канушин В. Ф. и др. Математическое моделирование скалярных полей рядом Фурье по системе сферических функций. М., 1979. С. 32. Рукопись деп. ВИНТИ, № 1284—79. 3. Вовк И. Г., Костына Ю. Г., Ральченко В. Ф. О суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами // Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. Новосибирск, 1980. С. 116—122. 4. Воробьев Н. Н. Теория рядов. М., 1986. 5. Мещеряков Г. А. О наилучшей квадратической аппроксимации геопотенциала // Наблюдения искусственных спутников Земли. 1980. № 20. С. 264—269. 6. Мещеряков Г. А., Фыс М. М. Трехмерная и референсная плотностные модели Земли // Геофиз. журн. 1986. Т. 8. № 4. С. 68—75. 7. Моризц Г. Современная физическая геодезия. М., 1983. 8. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. М., 1979. 9. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия. М., 1978. 10. Пеллинен Л. П., Нейман Ю. М. Физическая

- геодезия // Итоги науки и техники. Сер. Геодезия и аэросъемка. 1980. Т. 18. С. 121—129. 11. *Савельев Т. И.* Об устойчивом суммировании рядов Фурье // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1979. Т. 19. № 4. С. 69—73. 12. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979. 13. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: В 2-х ч. М., 1962. Ч. 1. 14. *Хемминг Р. В.* Цифровые фильтры. М., 1987. 15. *Lerch F. J., Putney B., Wagner C. A., Klosko S. M.* Goddard Earth models for oceanographic applications (GEM 10 B and 10 C) // J. Marine Geodesy. 1981. v. 5. N 2. P. 145—187. 16. *Rapp R. H.* A global $1 \times 1^\circ$ anomaly field combining satellite, GEOS-3 altimeter and terrestrial gravity data. Columbus, 1978. Dep. of Geod. Sci. Rep. N 278. 17. *Rapp R. H.* The Earth gravity field to degree and order 180 using SEASAT altimeter data, terrestrial gravity data, and other data. Columbus, 1981. Dep. of Geod. Sci. Rep. N 322. 18. *Wentzel H. G.* Adjustment of high degree geopotential models (GPM — 1 and 2) // Workshop „Construction and evaluation of global gravity field models“. Copengagen, 1985. P. 39.