

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВЫСОТ НАРУЖНЫХ ЗНАКОВ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Расчет высот знаков — один из важнейших этапов составления проекта геодезической сети. Наиболее надежно определять высоты путем установления видимости между пунктами по необходимым направлениям на местности с использованием подручных средств для подъема рекогносцировщика на необходимую высоту.

Однако этот способ небезопасен в техническом исполнении, требует значительных трудозатрат, а отсутствие гибкости в проектировании приводит к непроизводительному использованию средств и удорожанию проекта сети в целом.

Наряду с полевым методом определения высот знаков в практике применяют аналитические методы.

Для расчета высот знаков пары пунктов предложено много формул, наиболее удобными являются формулы В. Н. Шишкина. Откорректировка высоты знака по направлению на пункт с известной высотой выполняется так называемым «правилом коромысла». Рассчитать высоты знаков можно графическим путем с применением специальных линеек.

М. И. Коробочкин предложил формулы для определения оптимальных высот знаков, обеспечивающих наименьшие затраты на постройку пары пунктов. Имеются разработки по применению линейного программирования при построении оптимальных планов высот знаков с учетом перевозок материалов на пункты. В [5] изложена методика проектирования оптимального плана высот знаков для всей сети, основанная на методе динамического программирования. Однако этот метод удобен для проектирования небольших сетей с несложными схемами направлений, по которым обеспечивается видимость. В других случаях применение его будет неэффективно, так как окончательный проект будет условно оптимальным.

В геодезической практике задача расчета высот знаков заключается в установлении видимости между пунктами с фиксированными координатами по заданным направлениям при минимальной стоимости наружных знаков.

Решение поставленной задачи впервые предложено в [3, 4]. При ее решении изменение затрат на постройку с высотой знака аппроксимируется полиномом второй степени

$$\varphi_j(x_j) = a_j x_j^2 + b_j x_j + c_j, \quad (1)$$

где  $x_j$  — высота  $j$ -го знака;  $a_j, b_j, c_j$  — коэффициенты, зависящие от транспортных издержек на подвоз материалов к месту строительства  $j$ -го знака.

Условия видимости  $i$ -го и  $j$ -го знаков записываются в виде

$$r_{ij} x_i + r_{ji} x_j \geq v_{ij}, \quad (2)$$

где  $r_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij} + S_{ji}}$ ;  $v_{ij}$  — высота препятствия между знаками  $i$  и  $j$ ;  $S_{ij}$  и  $S_{ji}$  — расстояние до препятствия соответственно от  $j$ -го и  $i$ -го знаков.

План высот знаков будет оптимальный при выполнении следующих условий:

$$c = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) = \min; \quad (3)$$

$$r_{ij} x_i + r_{ji} x_j \geq v_{ij}; \quad (4)$$

$$\underline{\chi}_j \leq x_j \leq \bar{\chi}_j, \quad (5)$$

где  $x_j$  — ( $j=1, \dots, n$ ), а отрезок  $[\underline{\chi}_j, \bar{\chi}_j]$  определяет допустимый диапазон изменения высоты  $j$ -го знака.

Поставленная задача относится к кругу задач нелинейного программирования. Однако здесь предлагается нелинейную функцию  $\varphi(x)$  привести к линейному виду

$$\gamma_k(x) = \lambda_{kj} x_j + \mu_{kj}. \quad (6)$$

В (6) нелинейная функция  $\varphi(x)$  заменена рядом  $k$  прямых отрезков  $\gamma_k(x)$ , имеющих максимальное отклонение от  $\varphi(x)$  на ранее заданную допустимую величину  $\varepsilon$ . Таким образом, поставленную задачу можно решить методами линейного программирования. Это является классическим примером решения задачи нелинейного программирования методом линейного программирования.

Существенный недостаток такого способа в производственных условиях заключается в том, что при пересеченном рельефе по необходимым профилям практически каждый локальный экстремум в зависимости от комбинации высот знаков может стать экстремальным препятствием. Вследствие этого необходимо составление уравнений (4) практически для каждого локального экстремума. В результате возникают технические трудности в составлении этих уравнений, а сама задача становится громоздкой.

В настоящее время с появлением быстродействующих ЭВМ решение поставленной задачи вполне возможно методами нелинейного программирования. Предлагаем следующий метод ее решения.

Отметим, что наиболее надежную аналитическую проверку видимости между пунктами можно выполнить на профилях земной поверхности по необходимым направлениям. Для полной автоматизации проектирования оптимизацию проводят с помощью ЭВМ, следовательно, профили будут составляться по цифровой модели местности (ЦММ), хранящейся в памяти ЭВМ.

Исходные данные для выполнения оптимизации — координаты и отметки пунктов проектируемых знаков, каталог направлений, по которым необходимо обеспечение видимости.

Методы составления ЦММ подробно описаны в [7]. Наиболее эффективно отражает рельеф структурная модель, где опорные точки ЦММ совпадают с локальными экстремумами рельефа. Возможно также регулярное распределение опорных точек, т. е. их размещение в узлах регулярной сетки. Плотность их распределения зависит от характера и изрезанности рельефа. Безусловно, опорные точки должны отражать не рельеф, а модель физической поверхности местности с учетом растительного покрова и искусственных сооружений.

В случае небольшого числа профилей целесообразней принять за исходные данные не ЦММ, а цифровые модели профилей, т. е. текущие, с заданным интервалом  $\Delta S$  высоты физической поверхности местности вдоль необходимых направлений.

Высоты точек профилей определяем как средневзвешенные высоты окружающих опорных точек местности [6] по зависимости

$$H_p = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{H_i}{P_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i^2}}, \quad (7)$$

где  $P_i$  — расстояние от определяемой точки до  $i$ -й опорной;  $H_i$  — высота  $i$ -й опорной точки;  $n$  — число опорных точек. Определяя таким образом высоты точек профиля с достаточно малым шагом  $\Delta S$ , получаем полный вид профиля.

Сформулируем искомые условия задачи. Требуется минимизировать целевую функцию стоимости знаков

$$\sum_{i=1}^m c_i(h) = \min \quad (8)$$

при выполнении поставленных условий

$$V(H_i + h_i, H_j + h_j)_k - P(H_i, H_j)_k = a - v \geq 0, \quad i \in N, j \in N, i < j, N = (1, 2, \dots, m), \quad (9)$$

где  $V(H_i + h_i, H_j + h_j)$  и  $P(H_i, H_j)_k$  — соответствующие текущие высоты визирного луча и профиля на расстоянии  $k \times \Delta S$  от  $i$ -го пункта;  $a$  — минимальная допустимая высота визирного луча над земной поверхностью;  $v$  — поправка за кривизну Земли.

Количество ограничений (9) определяется числом направлений в сети.

Решение поставленной задачи известными градиентными методами предусматривает использование целевой функции без ограничений. Для этого попытаемся учесть ограничения (9) в целевой функции (8) с помощью штрафной функции [9].

Вид новой общей целевой функции следующий:

$$\sum_{i=1}^m c_i(h) + \sum_1^L b_{ij} r \min_{k \in K} (V(H_i + h_i, H_j + h_j)_k - P(H_i, H_j)_k - a - v) = \min, \quad (10)$$

где  $K = \left(1, 2, \dots, \frac{S_i}{\Delta S}\right)$ ;  $L$  — число направлений;  $b_{ij} = 1$  в случае

нарушения соответствующего условия (9), в противном случае  $b = 0$ ;  $r$  — коэффициент мощности штрафной функции. Входящая в (10) штрафная функция представляет собой гладкую унимодальную гиперповерхность  $m$ -го порядка, являющуюся продолжением поверхности целевой функции (8). В процессе проектирования предложенная штрафная функция искусственно увеличивает значение целевой функции (8) при невыполнении неравенств (9) и прямо пропорционально зависит от увеличения превышения точек земной поверхности над соответствующими точками проектного визирного луча.

В результате такого преобразования сведем решение задачи к нахождению минимума функции (10) без каких-либо ограничений. Решение такой задачи можно выполнить методом переменной метрики Дэвидона Флетчера—Пауэлла, относящегося к группе методов сопряженных градиентов [8]. Известно, что он наиболее эффективен из всех градиентных методов.

Предложенный метод реализуется по следующему алгоритму. В пространстве проектирования выбирают исходную точку, координатами которой являются высоты знаков, заведомо удовлетворяющие условиям (9), например  $H_i = 100$  м. Затем, вычисляя составляющие вектора градиента

$$v_i^z = \frac{\sum_{j=1}^m A_{ij} \left(\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)^z}{\left\{ \sum_{l=1}^m \left[ \sum_{j=1}^m A_{lj} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right]^2 \right\}^{1/2}}, \quad (11)$$

устанавливают направление поиска. В (11)  $z$  — номер итерации, а  $H_{ij}$  — элементы симметричной положительно определенной матрицы размерности  $m \times m$ . В процессе проектирования эта матрица превращается в матрицу, обратную матрице Гессе, элементы которой — вторые частные производные целевой функции. За исходную матрицу Гессе можно принять единичную. Далее по найденному направлению ведут одномерный поиск. Отыскав по ис-

следуемой линии оптимум, выполняют проверку на сходимость; при ее достижении поиск прекращается. В другом случае выбирают новое направление и определяют новую матрицу  $A$ . Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута сходимость на оптимум.

Предложенный алгоритм реализован на языке Фортран-IV на ЭВМ ЕС.

Приведем пример результатов работы алгоритма. Требуется

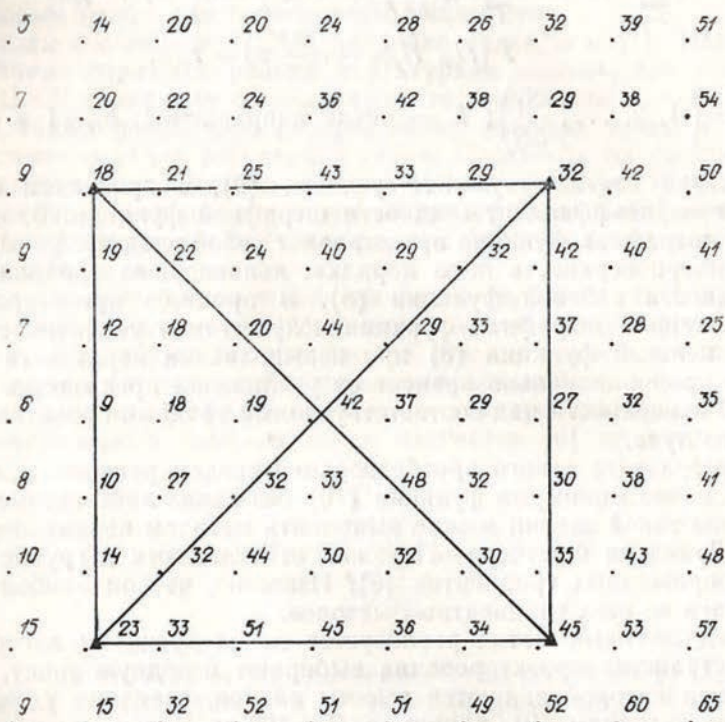


Схема сети на ЦММ.

найти оптимальный план высот знаков для сети, состоящей из четырех пунктов со схемой направлений и ЦММ, приведенной на рисунке в виде регулярной сетки размером  $10 \times 10$  и длинами сторон 100 м. Координаты пунктов известны и приведены ниже:

Координаты, м	1	2	3	4
X	204,0	204,0	804,0	804,0
Y	204,0	804,0	204,0	804,0
H	22,99	44,98	17,97	32,12

Допустимая высота визирного луча над земной поверхностью 1 м. В связи с короткими сторонами поправкой за кривизну Земли пренебрегаем.

Зависимость стоимости знака от его высоты аппроксимирована следующим выражением:

$$C_{руб.} = 0,005087 h_M^3 + 1,5412 h_M^2 + 54,81 h_M + 47,7. \quad (12)$$

Формула (12) учитывает, согласно [1, 2], полную стоимость материалов и трудозатрат для постройки деревянных сигналов высотой до столбика от 2 до 40 м. Расчеты произведены для второй категории трудности работ. Погрешность в определении стоимости

Таблица 1

Параметры оптимальных моделей при различных коэффициентах мощности штрафной функции

$r$	$h_1, м$	$h_2, м$	$h_3, м$	$h_4, м$	$C, руб.$	$\Sigma \Delta V, м$	$\max \Delta V, м$
100	24,89	9,82	17,80	16,15	6703	6,24	1,67
200	24,89	9,82	17,80	16,15	6703	6,24	1,67
300	27,40	9,26	19,25	18,05	6788	0,02	0,02
400	26,14	11,80	19,09	18,21	6823	0,01	0,01
600	22,16	20,26	18,70	18,70	7197	0,0	0,1

по (12) составляет  $\pm 7\%$ . Числовые коэффициенты в (12) могут изменяться при учете транспортных издержек на доставку материалов к пунктам.

Таблица 2

Выборочные итерации оптимизации высот знаков геодезической сети (коэффициент мощности штрафной функции  $r=300$ )

Номер итерации	$h_1, м$	$h_2, м$	$h_3, м$	$h_4, м$	$C, руб.$	$\Sigma \Delta V, м$	$\max \Delta V, м$
1	30,0	30,0	30,0	30,0	12870	0,0	0,1
2	20,6	20,3	20,1	20,1	7905	1,88	1,01
3	22,1	19,8	18,2	18,2	7388	1,32	0,52
4	22,5	19,5	18,7	18,7	7151	0,0	0,0
5	27,4	9,2	19,2	18,1	6793	0,09	0,05
6	27,40	9,26	19,25	18,05	6788	0,02	0,02

Коэффициент мощности штрафной функции определяем методом подбора. Отметим, что при недостаточно большом значении найденного минимума возможно невыполнение условий (9). При завышенном значении  $r$  процесс поиска оптимума может возрасти до бесконечности. Это обусловлено резким изломом проектной поверхности в окрестностях линии стыка целевой функции (8) и штрафной функции, где и находится оптимум. Для определения эффективного значения  $r$  достаточно исследовать 3—5 значений.

В табл. 1 представлены параметры оптимальных моделей для различных  $r$ , где  $h_i$  — высота соответствующих знаков;  $c$  — стоимость модели;  $\max \Delta V$  — максимальное превышение текущей точки профиля над проектным визирным лучом, т. е. экстремальное невыполнение условия (9);  $\Sigma \Delta V$  — сумма недопустимых  $\Delta V$  по всем профилям.

Расчеты показывают, что для  $r=100, 200$  величина  $\Delta V$  недопустима. Для  $r=300, 400$  оптимальные модели можно принять удовлетворительными, так как  $\Delta V$  незначительное. В табл. 2 приведены выборочные итерации процесса оптимизации модели  $r=300$ . Для  $r=600$  итерационный процесс бесконечен. Последующие итерации очень медленно изменяют параметры модели.

В заключение отметим, что оптимальной можно считать модель, полученную при  $r=300$ . Разница в стоимости моделей при  $r=300$  и  $r=600$  малоощутима. Это связано с небольшим количеством пунктов в решаемой задаче. При большом количестве такая разница значительна.

Составленный алгоритм позволяет находить с учетом условий местности и конфигурации сети экономически оптимальные высоты наружных знаков геодезических пунктов.

1. Баргер А. Л., Вдовин Н. Н. Руководство по постройке геодезических знаков. М., 1969.
2. Единые нормы выработки (времени) на геодезические и топографические работы. Полевые работы. М., 1982.
3. Коробочкин М. И. Определение оптимальных высот наружных знаков для фиксированной в плане геодезической сети. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. М., 1963.
4. Малков У. Х. Решение некоторых задач линейного программирования: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1962.
5. Тетерин Г. Н. Определение оптимальных высот геодезических знаков с помощью динамического программирования // Тр. НИИГАиК. 1972. Т. 27. С. 91—95.
6. Третьяк К. Р. Оптимизация проектирования схем измерений в инженерно-геодезических сетях // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1984. Вып. 40. С. 102—110.
7. Цифровое моделирование местности в топографо-геодезических целях. Обзорная информация ГУГК. М., 1980. Вып. 44.
8. Fletcher R., Powell M. J. D. A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization // Computer J. 1963. N 6. P. 118.
9. Mischke C. R. An Introduction to Computer. New York, 1968.

Статья поступила в редколлегию 26. 11. 86