УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К УРАВНИВАНИЮ МНОГОКРАТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ

Обратную многократную засечку принято уравнивать параметрическим методом. Коррелатный метод уравнивания из-за сложности составления условных уравнений еще не применялся, хотя он также интересен, как и параметрический. Приведем удобное для ЭВМ решение обратной многократной засечки, используя коррелатный метод уравнивания [1]. Ради простоты изложения, измеряем в геодезической сети углы, а не направления, причем в качестве исходных точек принимаем только четыре точки и три измеренных угла. При этом получим формулу для оценки допустимости свободных членов условных уравнений, пригодную и для параметрического метода уравнивания. Корреляционные связи между измеренными углами и координатами не учитываем.

Пусть известные точки имеют координаты:

	1	2	3	4
x, км	10	13	12	6
y, км	2	7,5	14	16

Измеренные углы на определяемой точке *5* между точками *1* и *2*: $\alpha=41°48'50''$; между точками 2 и 3: $\beta=40°03'22''$ и между точками *3* и *4*: $\gamma=39°05'17''$. Угол γ считаем избыточным и составим для него условное уравнение. Сначала, применяя известные формулы

$$m=\frac{\Delta y_{21}\operatorname{ctg}\alpha+\Delta y_{23}\operatorname{ctg}\beta+\Delta x_{31}}{\Delta x_{21}\operatorname{ctg}\alpha+\Delta x_{23}\operatorname{ctg}\beta-\Delta y_{31}};$$

$$\Delta x_{52}=\frac{(\Delta x_{21}\operatorname{ctg}\alpha-\Delta y_{21})\,m-\Delta y_{21}\operatorname{ctg}\alpha-\Delta x_{21}}{1+m^2};$$

$$\Delta y_{52}=\Delta x_{52}m,$$

вычислим координаты точки *5*: $x_5=3{,}9999283$ км, $y_5=8{,}0037790$. Затем составим параметрические уравнения для необходимых и избыточных углов, которые представим в общем виде:

$$B_t\delta X=V_t; \tag{1}$$

$$B_r\delta X+L_r=V_r, \tag{2}$$

где B_t, B_r — матрицы коэффициентов уравнений поправок необходимых и избыточных измерений; V_t, V_r — поправки в необходимые и избыточные измерения; L_r — свободные члены параметрических уравнений избыточных измерений, δX — поправки в координаты определяемой точки.

Для данного примера (1) и (2) запишем так:

$$(\alpha)=(a_{52}-a_{51})\,\varepsilon_5+(b_{52}-b_{51})\,\eta_5;$$

$$(\beta)=(a_{53}-a_{52})\,\varepsilon_5+(b_{53}-b_{52})\,\eta_5;$$

$$(\gamma)=(a_{54}-a_{53})\,\varepsilon_5+(b_{54}-b_{53})\,\eta_5+(\alpha_{54}-\alpha_{53}-\gamma). \tag{3}$$

Здесь a_{5N}, b_{5N} — коэффициенты уравнений поправок, вычисляемые по известным формулам, например,

$$a_{52}=20{,}6265\,\frac{\Delta y_{52}}{\Delta x_{52}^2+\Delta y_{52}^2},\quad b_{52}=-20{,}6265\,\frac{\Delta x_{52}}{\Delta x_{52}^2+\Delta y_{52}^2};$$

α_{54}, α_{53} — приближенные дирекционные углы; (α), (β), (γ) — поправки в измеренные углы. В уравнениях (3) поправки в координаты определяемой точки ε_5, η_5 выражены в дециметрах, а поправки в углы — в секундах дуги; координаты x, y — в километрах.

Исключая в уравнениях (1) и (2) параметры δX, получаем условные уравнения в общем виде:

$$(B_r B_t^{-1}, -E)\begin{pmatrix} V_t \\ \overline{V_r} \end{pmatrix} + L_r = 0, \tag{4}$$

где B_t^{-1} — обратная матрица; E — единичная матрица;

$$B_t = \begin{pmatrix} a_{52} - a_{51}, & b_{52} - b_{51} \\ a_{53} - a_{52}, & b_{53} - b_{52} \end{pmatrix}, \quad B_t^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} b_{53} - b_{52}, & b_{51} - b_{52} \\ a_{52} - a_{53}, & a_{52} - a_{51} \end{pmatrix};$$

d — определитель матрицы B_t (она всегда квадратная).

Выполняя вычисления для заданных исходных данных, получаем

$$a_{51} = -1{,}719, \quad a_{52} = -0{,}127, \quad a_{53} = 1{,}238, \quad a_{54} = 2{,}427$$

$$b_{51} = -1{,}719, \quad b_{52} = -2{,}285, \quad b_{53} = -1{,}650, \quad b_{54} = -0{,}607$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 1{,}592 - 0{,}566 \\ 1{,}365 \quad 0{,}635 \end{pmatrix}, \quad B_r = (1{,}189 \; 1{,}043),$$

$$B_t^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3561 & 0{,}3174 \\ -0{,}7654 & 0{,}8927 \end{pmatrix},$$

$$B_r B_t^{-1} = (-0{,}375 \quad 1{,}309),$$

$$-0{,}375(\alpha) + 1{,}309(\beta) - (\gamma) + 59{,}475'' = 0, \tag{5}$$

где (5) — условное уравнение.

Решив (4) по методу наименьших квадратов, найдем поправки в измеренные углы, а затем по формуле

$$\delta X = B_t^{-1} V_t \tag{6}$$

поправки в координаты определяемой точки

$$\delta X = \begin{pmatrix} \varepsilon_5 \\ \eta_5 \end{pmatrix}.$$

Для приведенного примера, решая условное уравнение (5) по методу наименьших квадратов, получаем поправки в углы:

$$(\alpha) = 7{,}814'', \quad (\beta) = -27{,}278'', \quad (\gamma) = 20{,}838''.$$

Поправки в координаты в дециметрах найдем по формуле (6):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_5 \\ \eta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3561 & 0{,}3174 \\ -0{,}7654 & 0{,}8927 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7{,}814 \\ -27{,}278 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}8755 \\ -30{,}3319 \end{pmatrix}.$$

Оценку точности координат и углов после уравнивания выполняем так:

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}}, \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}, \quad \mu^2 = (V_t^{\mathrm{T}} V_t + V_r^{\mathrm{T}} V_r) : (t + r - 2); \tag{7}$$

$$\frac{1}{P_{xy}} = f^{\mathrm{T}}_{x,y} B_t^{-1} \{E - (B_r B_t^{-1})^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} (B_r B_t^{-1})\} B_t^{-\mathrm{T}} f_{x,y}; \quad (8)$$

$$m_\gamma = \frac{\mu}{\sqrt{P_\gamma}}, \quad \frac{1}{P_\gamma} = f^{\mathrm{T}}_\gamma \{E - A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} A\} f_\gamma, \quad (9)$$

где $A = (B_r B_t^{-1}, -E)$ — матрица коэффициентов условных уравнений; f^{T}_{xy} — вектор коэффициентов весовой функции координат; f^{T}_{γ} — вектор коэффициентов весовой функции измеренных углов; $P_{x,y}$, P_γ — веса уравненных функций. Результаты вычислений по формулам (7)—(9) составляют: $m_\alpha = 34''$, $m_\beta = 22''$, $m_\gamma = 28''$; $\mu = 35{,}205''$, $m_{x_5} = 157{,}3$ см, $m_{y_5} = 281{,}75$ см.

Получим формулу для определения допустимости свободного члена условного уравнения (5):

$$W_\gamma = \alpha_{54} - \alpha_{53} - \gamma. \quad (10)$$

Дифференцируя (10), найдем

$$dW_\gamma = d\alpha_{54} - d\alpha_{53} - d\gamma.$$

Считая все слагаемые случайными ошибками, получаем

$$(dW_\gamma)^2 = (d\alpha_{54})^2 + (d\alpha_{53})^2 + (d\gamma)^2.$$

Корреляционные связи при этом не учитываем. Полагая координаты точек 4 и 3 безошибочными, запишем

$$d\alpha_{54} = a_{54}\varepsilon_5 + b_{54}\eta_5, \quad d\alpha_{53} = a_{53}\varepsilon_5 + b_{53}\eta_5.$$

Следовательно, можно принять

$$d\alpha_{54} = \frac{\varepsilon}{S_{54}}\rho'' = m_{\alpha_{54}}, \quad d\alpha_{53} = \frac{\varepsilon}{S_{53}}\rho'' = m_{\alpha_{53}}, \quad (11)$$

где S_{54}, S_{53} — расстояния между точками *5* и *4*; *5* и *3*; ε — погрешность в плановом положении точки *5*. Поэтому

$$W_{\text{доп}} = \sqrt{m^2_{\alpha_{54}} + m^2_{\alpha_{53}} + m^2_\gamma}. \quad (12)$$

Подставляя в формулы (11) вместо ε полученные ошибки m_{x_5} и m_{y_5}, зная, что $S_{54} = 8{,}246$ и $S_{53} = 10$ км, а $m_\gamma = 35{,}205''$, из формулы (12) находим $W_{\text{доп}} = 78''$.

Для подтверждения правильности результатов вычислений уравняем триангуляционную сеть параметрическим методом. Матрицы коэффициентов уравнений поправок B, нормальных уравнений $B^{\mathrm{T}}B$, свободных членов L, обратная матрица $(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}$ и решение — $(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}L$ имеют вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}592 & -0{,}566 \\ 1{,}365 & 0{,}635 \\ 1{,}189 & 1{,}043 \end{pmatrix}; \quad B^{\mathrm{T}}B = \begin{pmatrix} 5{,}8114 & 1{,}2058 \\ 1{,}2058 & 1{,}8114 \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 59{,}039 \end{pmatrix};$$

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}19965 & -0{,}13291 \\ -0{,}13291 & 0{,}64052 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 70{,}19737 \\ 61{,}57767 \end{pmatrix} = B^{\mathrm{T}}L;$$

$$\delta X = \begin{pmatrix} -\ \ 5{,}8306 \\ -30{,}1118 \end{pmatrix}.$$

Найдем поправки в углы:

$$V = B\delta X + L = \begin{pmatrix} 7{,}761 \\ -27{,}080 \\ 20{,}700 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы $(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}$ находим обратные веса уравненных координат

$$\frac{1}{P_{x_5}} = 0{,}19965; \quad \frac{1}{P_{y_5}} = 0{,}64052.$$

Имея ошибку единицы веса μ, легко вычислить (в дециметрах) $m_{x_5}=15{,}730$; $m_{y_5}=28{,}175$.

Результаты вычислений параметрического уравнивания в пределах точности совпадают с результатами коррелатного метода.

Сравним полученные результаты с точными данными координат и с вычисленными по методике С. А. Шупеля [2], когда координаты точки 5 находят четыре раза по углам α, β; $\begin{matrix}\alpha+\beta,\ \gamma \\ \alpha,\ \beta+\gamma\end{matrix}$; β, γ, а за окончательное значение принимают среднее арифметическое:

	Точные значения, км	Коррелатный метод	По С. А. Щупелю [2], км
x_5	4	3,99923	4,00185
y_5	8	8,00075	7,99779
m_{y_5}		0,00282	0,00350

Учет корреляционных связей. На производстве, применяя метод обратной засечки, принято измерять направления, а не углы. В рассмотренном ранее примере измеряли направления, а после вычисляли углы α, β, γ. Уравнивая триангуляцию, чаще всего пренебрегают этим различием. Чтобы учесть коррелированность угловых величин, составим прямую и обратную корреляционные матрицы для углов α, β и γ:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Матрицы (13) определены на основе известного факта, что коэффициент корреляции двух углов, полученных как разность измеренных смежных направлений, равен —0,5.

Коррелатный метод. Имея коэффициенты условного уравнения (5) и корреляционную матрицу Q, найдем необходимые матрицы, поправки в углы, координаты и ошибки уравненных функций:

$$AQA^{\mathrm{T}} = (-0{,}375 \;\; 1{,}309 \; -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}375 \\ 1{,}309 \\ -1 \end{pmatrix} = 4{,}65398;$$

$$V = -QA^{\mathrm{T}}(AQA^{\mathrm{T}})^{-1} W = -\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -0{,}375 \\ 1{,}309 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4{,}65398} (59{,}475'') = \begin{pmatrix} 13{,}156'' \\ -25{,}514 \\ 21{,}143 \end{pmatrix};$$

$$\delta X = B_t^{-1} \boldsymbol{V}_t = \begin{pmatrix} 0{,}3561 & 0{,}3174 \\ -0{,}7654 & 0{,}8927 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13{,}156 \\ -25{,}514 \end{pmatrix} = -$$

$$= -\begin{pmatrix} 3{,}4133 \\ 32{,}847 \end{pmatrix} \text{дц};$$

$$\mu^2 = \frac{V^{\mathrm{T}} Q^{-1} V}{r} = 760{,}03647; \quad \mu = 27{,}5688'';$$

$$m_\gamma = 17{,}692''; \quad m_{x_5} = 8{,}567 \text{ дц}.$$

Параметрический метод. Приведем результаты вычислений с учетом корреляции:

$$B^{\mathrm{T}} Q^{-1} B = \begin{pmatrix} 19{,}13374 & 5{,}15291 \\ 5{,}15291 & 2{,}93421 \end{pmatrix};$$

$$(B^{\mathrm{T}} Q^{-1} B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0991625 & -0{,}1741444 \\ -0{,}1741444 & 0{,}6466311 \end{pmatrix};$$

$$B^{\mathrm{T}} Q^{-1} L = \begin{pmatrix} 234{,}599138 \\ 113{,}983838 \end{pmatrix}; \quad \delta X = -\begin{pmatrix} 3{,}41379 \\ 32{,}85137 \end{pmatrix} \text{дц};$$

$$V = B\delta X + L = \begin{pmatrix} 13{,}159 \\ -25{,}520 \\ 21{,}152 \end{pmatrix};$$

$$m_{x_5} = 8{,}681 \text{ дц}; \qquad m_{y_5} = 22{,}169 \text{ дц}.$$

Сравнение результатов:

	Некоррелированные величины	Коррелированные величины
(α)	7,814″	13,159″
(β)	—27,278″	—25,520″
(γ)	20,838″	21,152″
ε_5	— 5,831 дц	— 3,414 дц
η_5	—30,112	—32,851
μ	35,205″	27,569
m_γ	28,374″	17,692″
m_{x_5}	15,615 дц	8,681 дц
m_{y_5}	27,969 дц	22,169 дц
x_5	3,99933 км	3,99959 км
y_5	8,00075 км	8,00049 км

Как видно, коррелатный метод уравнивания не уступает параметрическому и может найти применение на производстве. Учет корреляционных связей почти не влияет на точность определения координат.

1. *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 35. С. 75—84. 2. *Шупель С. А.* К решению обратной угловой засечки по четырем точкам // Геодезия и картография. 1987. № 1. С. 51—52.

Статья поступила в редколлегию 21. 10. 87