УДК 528.72/73 +528.11

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИРІВНЮВАННЯ ДАНИХ ФОТОТЕОДОЛІТНОГО ЗНІМАННЯ

© Москаль Н.М., 1999
ДУ "Львівська політехніка"

Исследованы математические модели для общего случая наземной фотограмметрической съемки. Получена универсальная обобщенная модель и теоретическое решение задачи совместного уравнивания измеренных фотограмметрических величин и опорных данных. Рассмотрены примеры частных случаев обобщенной модели, в частности для съемки с высокоточными опорными данными. Теоретически исследовано влияние ошибок опорных данных на процесс совместного уравнивания и определены условия, при которых ошибками опорных данных можно пренебречь. Предложен способ априорной оценки влияния ошибок для практического использования.

Mathematical models for general case of terrestrial photogrammetrial survey are investigated. Generalized mathematical model which is universal for analytical method of terrestrial survey matherials processing is created. Theoretical solution of joint justification of measured photogrammetric magnitudes and control data is shown. The examples of particular cases of generalized model, namely for accuracy surveying using control data are described. Influence of control data errors on the process of joint justification of photoframmetrical measurements and control data is researched theoretically. The control when it is possible to neglect the control data errors are defined. The apriori method of estimation of errors influence for practical application is proposed.

Вступ. Фототеодолітне знімання – один із засобів реконструкції просторових об'єктів з метричних фотозображень та кількісної їх оцінки для різних прикладних галузей (гірнича справа, архітектура, будівництво, екологія, вивчення льодовиків, зсувних явищ тощо).

Із застосуванням ЕОМ в камеральному фотограметричному виробництві опрацювання наземних знімків виконують аналітичним методом. При цьому використовують традиційні математичні моделі та алгоритми [1,7,9,11,12], які не завжди враховують зміни, що сталися у зв'язку з впровадженням сучасних геодезичних та фотограметричних методів і апаратури.

У даній роботі зроблено спробу запропонувати узагальнену математичну модель процесу вирівнювання даних фототеодолітного знімання, яка є універсальною як для традиційних методів, так і для нових технологій збору та опрацювання даних.

1. Узагальнена теоретична модель. У роботі [6] сформульовано узагальнену математичну модель та наведено розв'язок, які можна вважати універсальними для фотограметричних задач. Частковим випадком цієї моделі є завдання вирівнювання даних фототеодолітного знімання.

Розглянемо математичні моделі аналітичного способу опрацювання даних фототеодолітного знімання. Даними у цьому випадку вважаємо:

– фотограметричні виміри (монокулярні або стереоскопічні) наземних знімків;

– координати фотостанцій, зафіксовані різноманітними способами, особливо акцентуємо увагу на застосуванні GPS-спостережень;

– кути нахилу знімків;

– просторові координати опорних (коректурних) точок;

– дані про базис фотографування;

– коректурні напрямки (горизонтальні і вертикальні).

Відомо, що основними рівняннями аналітичного способу для фототеодолітного знімання є рівняння колінеарності :

$$x - x_0 = f\frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}$$

$$z - z_0 = f\frac{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)} \tag{1}$$

де $x_0,\ z_0, f$ – елементи внутрішнього орієнтування знімків; X_S, Y_S, Z_S – координати центра фотографування; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ – напрямні косинуси для наземних знімків.

Рівняння (1) після лінеаризації мають вигляд **(модель1)**:

$$\varepsilon = -(M\delta E + B\delta S + C\delta\psi + D\delta\Gamma) + Y, \tag{2}$$

де $\delta E, \delta S, \delta\Psi, \delta\Gamma$ – вектори поправок до елементів центральної проекції, лінійних елементів зовнішнього орієнтування (координат фотостанції), кутових елементів зовнішнього орієнтування знімків, просторових координат точки об'єкта; Y – вільний член (вектор вимірів); ε – вектор поправок до виміряних величин.

В теорії фотограметрії добре розроблені та описані математичні моделі опорних даних, в яких допускається, що опорні дані відомі без помилок. Зокрема, майже завжди допускається, що елементи центральної проекції відомі точно і тому вектор δE не визначається, тобто калібрування системи для фототеодолітного знімання не виконується. Це зумовлено високими метричними характеристиками та знімальної системи в цілому (фотокамера + фотопластинка). Така математична модель має вигляд **(модель 2)**:

$$\varepsilon = -(B\delta S + C\delta\Psi + D\delta\Gamma) + Y\ . \tag{3}$$

З моделі (3) випливає ось що:

модель 3 – координати фотостанції безпомилкові

$$\varepsilon = -(C\delta\Psi + D\delta\Gamma) + Y\ ; \tag{4}$$

модель 4 – координати фотостанції і кутові елементи безпомилкові

$$\varepsilon = -(D\delta\Gamma) + Y\ . \tag{5}$$

Окрему підгрупу в моделях (2)–(5) становлять рівняння для коректурних (опорних) точок. Якщо їх вважають безпомилковими, то вектор $\delta\Gamma$ для таких точок не визначається.

Певний теоретичний і практичний інтерес становлять інші математичні моделі, в яких опорні дані вважаються відомими з певною точністю, а в процесі вирівнювання фотограметричних та опорних даних відшукуються поправки до обох типів даних.

Тоді **узагальнена математична модель** виглядає так:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= -(B\delta S + C\delta\psi + D\delta\Gamma) + Y_{\Phi}, \text{ вага } P_{\Phi}\\
\gamma_S &= -\delta S + Y_S, \text{ вага } P_S\\
\gamma_\psi &= -\delta\psi + Y_\psi, \text{ вага } P\psi\\
\gamma_\Gamma &= -\delta\Gamma + Y_\Gamma, \text{ вага } P_\Gamma\\
\gamma_Б &= -B_Б\delta S + Y_Б, \text{ вага } P_Б\\
\gamma_\beta &= -B_\beta\delta S - D_\beta\delta\Gamma + Y_\beta, \text{ вага } P_\beta
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

де γ_S – вектор поправок до виміряних координат фотостанцій; γ_Γ – вектор поправок до виміряних координат опорних точок; γ_ψ – вектор поправок до виміряних кутових елементів зовнішнього орієнтування; $Y, Y_S, Y_\psi, Y_\Gamma, Y_Б, Y_\beta$ – відповідно вектори вимірів: фотограметричних, координат фотостанцій, кутових елементів зовнішнього орієнтування, опорних точок, базису, коректурних напрямків; P_i – ваги відповідних виміряних величин.

Тут пояснення вимагають два останні рівняння (6), які стосуються базису та коректурних напрямків.

Довжина базису фотографування та його кутова орієнтація є функцією просторових координат лівого та правого центрів фотографування. Тому цей тип рівняння завжди зводиться до моделі з поправкою $\gamma_Б$, вільним членом $Y_Б$ та матрицею часткових похідних $B_Б$.

Аналогічна ситуація виникає і з коректурними напрямками (горизонтальними і вертикальними кутами), які можна подати як функції просторових координат центра проекції та точки об'єкта. Тому цей тип рівняння зводиться до моделі з поправкою γ_β вільним членом Y_β та матрицями часткових похідних B_β і D_β.

Представимо систему (6) у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= Y - AX - DZ,\\
\gamma &= \bar{Y} - TX - FZ.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Вектори X та Z знаходять за певних апріорі визначених умов, що характеризують стохастичну природу ймовірнісної моделі. Такими умовами можуть бути:

1) помилки ε та γ підпадають під дію нормального закону розподілу, некорельовані як між собою, так і всередині груп ε та γ (це класичний метод найменших квадратів); у цьому випадку для векторів ε та γ відома діагональна матриця ваг:

$$P = \begin{bmatrix} p_\varepsilon & \\ & p_\gamma \end{bmatrix}; \tag{8}$$

2) помилки ε та γ підпадають під дію негауссового закону розподілу, некорельовані між собою, але корельовані всередині груп ε та γ, так що коваріаційна матриця помилок вимірів відома

$$\sum = \begin{bmatrix} \sum_\varepsilon & \\ & \sum_\gamma \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Для помилок з гауссовим розподілом та матрицею ваг (8) приймається модель мінімізації поправок

$$\varepsilon^T \cdot P_\varepsilon \cdot \varepsilon + \gamma^T \cdot P_\gamma \cdot \gamma = \min , \tag{10}$$

а для помилок з негауссовим розподілом та матрицею (9) можна застосувати умову мінімізації неквадратичної функції втрат або умову мінімізації змішаної функції втрат [5]:

$$\varepsilon^2 + |\gamma|^{2+d} = \min , \tag{11}$$

де d – параметр неквадратичності, $-1 < d \le 0$

Модель (7) з умовою (11) та коваріаційною матрицею (9) з теоретичної точки зору є найбільш узагальненою.

2. Теоретичний розв'язок задачі.

Представимо (7) у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & D \\ T & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \tag{12}$$

або

$$\eta = \mathrm{R - S\,U} . \tag{12'}$$

При квадратичній функції втрат $\eta^T \cdot \eta = \min$ і після перетворень, аналогічно до наведених у [6], отримаємо вирівняні значення невідомих

$$\hat{U} = (S^T \cdot \sum^{-1} \cdot S)^{-1} \cdot S^T \cdot \sum^{-1} \cdot R$$

або

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{X}} \\ \hat{\mathrm{Z}} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A^T & T^T \\ D^T & F^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_\varepsilon^{-1} & \\ & \sum_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & D \\ T & F \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A^T & T^T \\ D^T & F^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_\varepsilon^{-1} & \\ & \sum_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ \overline{\mathrm{Y}} \end{bmatrix}$$

і

(13)

$$\hat{U}=\begin{bmatrix}\hat{X}\\ \hat{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T\Sigma_\varepsilon^{-1}A+T^T\Sigma_\gamma^{-1}T & A^T\Sigma_\varepsilon^{-1}D+T^T\Sigma_\gamma^{-1}F\\ D^T\Sigma_\varepsilon^{-1}A+F^T\Sigma_\gamma^{-1}T & D^T\Sigma_\varepsilon^{-1}D+F^T\Sigma_\gamma^{-1}F\end{bmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}A^T\Sigma_\varepsilon^{-1}Y+T^T\Sigma_\gamma^{-1}\overline{Y}\\ D^T\Sigma_\varepsilon^{-1}Y+F^T\Sigma_\gamma^{-1}\overline{Y}\end{bmatrix}$$

У скороченому вигляді матимемо :

$$\begin{bmatrix}\hat{X}\\ \hat{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Оцінка максимуму правдоподібності для дисперсії σ^2 дорівнюватиме:

$$\hat{S}^2 = (R - S\hat{U})^T\cdot\Sigma^{-1}(R - S\hat{U})\ /\ (n-r)\ , \tag{15}$$

де n – число рівнянь, що входять в систему (7); r – число невідомих системи (7).

При змішаній функції втрат $\varepsilon^T\cdot\varepsilon+|\gamma|^{2+d} = \min$ на підставі [4] матимемо:

$$\begin{bmatrix}\tilde{X}\\ \tilde{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1+\Delta_1\\ b_2+\Delta_2\end{bmatrix}, \tag{16}$$

де $$\Delta_1 = T^T\cdot\Sigma_\gamma^{-1}\overline{Y}\ \Sigma(\gamma\ \Delta);$$

$$\Delta_2 = F^T\cdot\Sigma_\gamma^{-1}\overline{Y}\cdot\Sigma(\gamma\cdot\Delta);$$

$$\Delta_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{(d\cdot\ln|\overline{G}\cdot\gamma_i|)^j}{j!},$$

де $G=(K^{-1})^T,\ K^T\cdot K=\Sigma_\gamma,$ (17)

де j=1, 2, 3, ..., p – число членів розкладу в ряд (як правило, $p\le 4$).

Оцінка для дисперсії σ^2 буде:

$$\tilde{S}^2 = (R - S\tilde{U})^T\cdot\tilde{\Sigma}^{-1}(R - S\tilde{U})\ /\ (n-r) \tag{18}$$

де $\tilde{\Sigma}=\begin{bmatrix}\tilde{\Sigma}_\varepsilon & \\ & \tilde{\Sigma}_\gamma\end{bmatrix}$; $\tilde{\Sigma}_\gamma=\Sigma_\gamma(1+2d+2d^2)$.

Отже, сформульована модель (7) та розв'язок (13)–(18) є узагальненим розв'язком задачі фототеодолітного знімання при застосуванні опорних даних.

3. Модель фототеодолітного знімання при відомих елементах зовнішнього орієнтування та опорних даних. Така модель традиційно застосовується при фототеодолітному зніманні. Якщо розглядати вказані в заголовку типи даних як відомих з деякою точністю, то ця модель є окремим випадком моделі (6).

Розглянемо випадок, коли опорні точки та лінійні елементи зовнішнього орієнтування відомі. У випадку застосування GPS вони відомі з високою та практично однаковою точністю і матриця ваг про це свідчить.

Для цього випадку модель буде така:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\Phi} &= -(B_{\Phi}\delta S + C_{\Phi}\delta\Psi + D_{\Phi}\delta\Gamma_{\Phi}) && + Y_{\Phi} \\
\varepsilon_{\Phi\text{ОП}} &= -(B_{o}\delta S + C_{o}\delta\Psi \qquad + M_{o}\delta\Gamma_{\text{ОП}}) && + Y_{\Phi\text{ОП}} \\
\gamma_{S} &= -\delta S && + \overline{Y}_{S} \\
\gamma_{\text{ОП}} &= \qquad\qquad -\delta\Gamma_{\text{ОП}} && + \overline{Y}_{\text{ОП}}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Матриця ваг відома:

$$
P = \begin{bmatrix} P_{\Phi} & & & \\ & P_{\Phi\text{ОП}} & & \\ & & P_{S} & \\ & & & P_{\text{ОП}} \end{bmatrix}, \tag{20}
$$

де ε_{Φ} – помилки фотограметричних вимірів на усіх визначуваних точках об'єкта; $\varepsilon_{\Phi\text{ОП}}$ – помилки фотограметричних вимірів на опорних точках; γ_{S} – помилки просторових координат лінійних елементів зовнішнього орієнтування; $\gamma_{\text{ОП}}$ – помилки просторових координат опорних точок.

Виконаємо вирівнювання для моделі (19) за умови, коли

$$
\varepsilon_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi}\varepsilon_{\Phi} + \varepsilon_{\Phi\text{ОП}}^{\mathrm{T}} P_{\Phi\text{ОП}}\varepsilon_{\Phi\text{ОП}} + \gamma_{S}^{\mathrm{T}} P_{S}\gamma_{S} + \gamma_{\text{ОП}}^{\mathrm{T}} P_{\text{ОП}}\gamma_{\text{ОП}} = \min . \tag{21}
$$

Представимо систему (19) у такому вигляді:

$$
\eta = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\Phi} \\ \varepsilon_{\Phi\text{ОП}} \\ \gamma_{S} \\ \gamma_{\text{ОП}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{\Phi} \\ \mathrm{Y}_{\Phi} \\ \mathrm{Y}_{S} \\ \mathrm{Y}_{\text{ОП}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{\Phi} & C_{\Phi} & D_{\Phi} & O \\ B_{o} & C_{o} & O & M_{o} \\ E_{S} & O & O & O \\ O & O & O & E_{\text{ОП}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta & S \\ \delta & \Psi \\ \delta & \Gamma_{\Phi} \\ \delta & \Gamma_{\text{ОП}} \end{bmatrix}, \tag{22}
$$

де E – одинична матриця

або

$$
\eta = R - SU . \tag{22'}
$$

Очевидно, що розв'язок буде аналогічний (12). Запишемо:

$$
\hat{U} = \begin{bmatrix} \delta & \hat{S} \\ \delta & \hat{\Psi} \\ \delta & \hat{\Gamma}_{\text{тм}} \\ \delta & \hat{\Gamma}_{..} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{1} \\ b_{2} \\ b_{3} \\ b_{4} \end{bmatrix}; \tag{23}
$$

де $Q_{11} = B_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} B_{\Phi} + B_{o}^{\mathrm{T}} P_{\Phi\text{ОП}} B_{o} + P_{S}$;

$Q_{12} = B_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} C_{\Phi} + B_{o}^{\mathrm{T}} P_{\Phi\text{ОП}} C_{o}$;

$Q_{13} = B_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} D_{\Phi}$;

$Q_{14} = B_{o}^{\mathrm{T}} P_{\Phi\text{ОП}} M_{o}$ $\quad Q_{24} = Q_{21}^{T}$ $\quad Q_{31} = Q_{13}^{T}$ $\quad Q_{41} = Q_{14}^{T}$

$Q_{22} = C_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} C_{\Phi} + C_{o}^{\mathrm{T}} P_{\Phi\text{ОП}} C_{o}$, $\quad Q_{23} = C_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} D_{\Phi}$,

$Q_{24} = C_{o}^{T} P_{\Phi\text{ОП}} M_{o}$, $\quad Q_{32} = Q_{23}^{T}$, $\quad Q_{33} = D_{\Phi}^{\mathrm{T}} P_{\Phi} D_{\Phi}$,

$Q_{34} = 0$, $\quad Q_{42} = Q_{24}^{T}$, $\quad Q_{43} = Q_{34}^{T}$,

$$Q_{44} = M_o^T P_{ФОП} M_o + P_{ОП},$$
$$b_1 = B_Ф^T P_Ф Y_Ф + B_o^T P_{ФОП} Y_{ОП} + E_S P_S \overline{Y}_S,$$
$$b_2 = C_Ф^T P_Ф Y_Ф + C_o^T P_{ФОП} Y_{ФОП},$$
$$b_3 = D_Ф^T P_Ф Y_Ф,$$
$$b_4 = M_o^T P_o Y_{ФОП} + E_{ОП} P_{ОП} \overline{Y}_{ОП}.$$

Оцінка для дисперсії σ^2 обчислюється за формулою (15) за умови, що вихідним є рівняння (22).

Отже, розв'язок (23) та оцінка точності типу (15) є узагальнюючими для фототеодолітного знімання з відомими центрами проекції та опорними точками.

4. Теоретичні дослідження впливу помилок опорних даних на процес вирівнювання. Завдання вирівнювання фотограмметричних вимірів та опорних даних є завданням вирівнювання різноманітних вимірів. Матриці (8), (20) відповідають виміряним величинам різної фізичної природи.

Вимірювання координат точки на знімку проводиться у міліметрах, координати опорних точок та центрів проекції визначаються у метрах, кутові елементи зовнішнього орієнтування визначаються в радіанній або градусній мірі.

Для погодження вирівнювання різнорідних величин доцільно застосовувати критерій узгодженості, запропонований В.М. Ганьшиним [2], та на який звернув увагу, з врахуванням специфіки фотограмметричних вимірів і помилок опорних даних, О.Л. Дорожинський [3].

Якщо відомі середні квадратичні помилки одиниці ваги для першої, другої та i-тої груп вимірів, то коефіцієнти узгодженості ваг є такими:

$$K_1 = \frac{\delta_{01}^2}{\delta_{01}^2}, K_2 = \frac{\delta_{01}^2}{\delta_{02}^2}, \quad K_3 = \frac{\delta_{01}^2}{\delta_{03}^2}, \quad \dots \quad, K_n = \frac{\delta_{01}^2}{\delta_{0n}^2}, \tag{24}$$

а матриця ваг матиме вигляд:

$$P^{-1} = \frac{1}{\delta_{01}^2} \Sigma = \begin{bmatrix} K_1^{-1} p_1^{-1} & & & \\ & K_2^{-1} p_2^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & K_n^{-1} p_n^{-1} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Перевіримо це на прикладі.

Відомо, що вага є величина обернена до квадрата помилки. Нехай маємо першу групу вимірів з вагами P_1, стандартом δ_{01}^2 та розмірністю (1/мм^2). Для другої групи вимірів маємо ваги P_2, із стандартом δ_{02}^2 та розмірністю (1/м^2). Для n-ї групи вимірів маємо ваги P_n, із стандартом δ_{0n}^2 та розмірністю (1/град^2). Тоді отримаємо:

$$K_1 P_1 \left(\frac{MM^2}{MM^2} \cdot \frac{1}{MM^2} \right) = K_1 P_1 \left(\frac{1}{MM^2} \right);$$

$$K_2 P_2\left(\frac{M^2}{MM^2}\cdot\frac{1}{M^2}\right)=K_2 P_2\left(\frac{1}{MM^2}\right) \tag{26}$$

$$K_n P_n\left(\frac{\text{ГРА}D^2}{MM^2}\cdot\frac{1}{\text{ГРА}D^2}\right)=K_n P_n\left(\frac{1}{MM^2}\right)$$

Отже, введення коефіцієнтів K_i усуває різнорідність даних. Самі ж ваги призначені, як правило, апріорі або з інших міркувань і є числами, наприклад від 1 до 100.

Важливим з практичної точки зору є відношення величин ваг для точок, які вважаються безпомилковими (наприклад, для опорних точок), та інших точок, які не можна вважати безпомилковими. Вперше такі дослідження для моделі типу

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Y - BU - DZ \\ \gamma &= \phantom{Y - BU -{}} Z \end{aligned} \tag{27}$$

провів Ю.І. Маркузе [8]. Він показав, що для фотограметричних вимірів можна розрізняти марковані і немарковані точки. Виміри для маркованих точок вважають безпомилковими (помилкою наведення на марковану точку можна знехтувати), якщо співвідношення ваг вимірів маркованої і немаркованої точки є 100:1.

Визначимо умови, за яких помилками опорних даних можна нехтувати. Для цього використаємо підхід, запропонований проф. О. Дорожинським [4], та застосуємо його до моделі (19). Такі дослідження для фототеодолітного знімання в літературі не зустрічалися і проводяться нами вперше.

Перепишемо (19) у вигляді :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Phi} &= Y_{\Phi} - D_{\Phi}\delta\Gamma_{\Phi} - B_{\Phi}\delta S - C_{\Phi}\delta\psi \\ \varepsilon_{\Phi\text{ОП}} &= Y_{\Phi\text{ОП}} \qquad - B_o\delta S - C_o\delta\psi - M_o\delta\Gamma_o \\ \gamma_S &= Y_S \qquad -\delta S \\ \gamma_{\text{ОП}} &= Y_{\text{ОП}} \qquad - \delta\Gamma_{\text{ОП}} \end{aligned} \tag{28}$$

або

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Y - DU - AZ, \quad \text{вага } P_1; \\ \gamma &= \overline{Y} \qquad - EZ, \quad \text{вага } P_2; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\text{де } D=\begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix},\ U=[\delta\Gamma_{\Phi}],\ Y=\begin{bmatrix} Y_{\Phi} \\ Y_{\Phi\text{ОП}} \end{bmatrix},\ \overline{Y}=\begin{bmatrix} \overline{Y}_S \\ \overline{Y}_{\text{ОП}} \end{bmatrix}; \tag{30}$$

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{\Phi} \\ \varepsilon_{\Phi\text{ОП}} \end{bmatrix}, \gamma=\begin{bmatrix} \gamma_S \\ \gamma_{\text{ОП}} \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} B_{\Phi}C_{\Phi}O \\ B_oC_oM_o \end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix} \delta S \\ \delta\psi \\ \delta\Gamma_{\text{ОП}} \end{bmatrix}.$$

Для вирівняних результатів вимірів матимемо:

$$\Phi_1 = Y - \varepsilon = DU + AZ, \tag{31}$$

а для опорних даних

$$\Phi_2 = \overline{Y} - \gamma = EZ. \tag{31'}$$

Якщо допустити, що помилки опорних даних нінащо не впливають, тобто $Z \approx 0$, то з (31) випливає:

$$\widetilde{\Phi}_1 = \widetilde{Y} - \widetilde{\varepsilon} = D\widetilde{U}\,. \tag{32}$$

Застосувавши критерій "нульового" впливу [8], запишемо, що середні квадратичні помилки функції Φ_ε та Φ_ε відрізняються між собою так:

$$m_\Phi^2 - m_{\widetilde{\Phi}}^2 \le \varepsilon \cdot m_{\widetilde{\Phi}}\,. \tag{33}$$

Із (33) випливає для додатно визначених величин:

$$m_\Phi^2 - m_{\widetilde{\Phi}}^2 \le m_\Phi^2(2\varepsilon + \varepsilon^2)\,. \tag{34}$$

Знайдемо середні квадратичні помилки для функцій

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & A \\ O & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ Z \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} U \\ Z \end{bmatrix} \tag{35}$$

та $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_1$. (36)

Для функції Ф (35) матимемо середню квадратичну помилку:

$$m^2 = \mu^2 S \textstyle\sum^{-1} S^T, \tag{37}$$

де $\sum^{-1}$ – обернена матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь.

З рівняння (35) матимемо:

$$\sum = \begin{bmatrix} D & A \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & O \\ A^T & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^T P_1 D & D^T P_1 A \\ A^T P_1 D & A^T P_1 A + P_2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Використовуючи формулу Фробеніуса [10], знайдемо $\sum^{-1}$:

$$\sum^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

де $R_{11} = (D^T P_1 D)^{-1} + D^{-1} A P_2^{-1} A^T (D^{-1})^T$, (40)

$R_{12} = -D^{-1} P_2^{-1} A^T \qquad R_{21} = R_{12}^T\,, \qquad R_{22} = P_2^{-1}$

Тоді отримаємо :

$$m_{\Phi_1}^2 = \mu^2 (D R_{11} D^T + 2 A R_{21} \cdot D^T + A R_{22} \cdot A^T);$$

$$m_{\widetilde{\Phi}_1}^2 = \widetilde{\mu}^2 (D \widetilde{R}_{11} D^T)\,. \tag{41}$$

Підставивши значення (41) у формулу (35), визначимо вплив помилок опорних даних на результати вирівнювання. Ця формула досить сувора і враховує корельованість обчислених значень невідомих при спільному вирівнюванні.

Значно простіше на практиці використати наближену різницю $(m_\Phi^2 - m_{\widetilde{\Phi}}^2)$. Вважаючи, що $\widetilde{\mu}^2 = \mu^2$, $R_{11} \approx \widetilde{R}_{11}$, і корельованість векторів U та Z є слабкою ($R_{21} \approx 0$), отримаємо:

$$A R_{22} A^T \le D R_{11} D^T (2\varepsilon + \varepsilon^2) \tag{42}$$

або з врахуванням (40)

$$A R_{22} A^T \le \left(P_1^{-1} + A P_2^{-1} A^T\right)\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right), \tag{43}$$

тобто $a_{ij} \le \widetilde{a}_{ij}\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)$.

Звідси можна зробити такий висновок: якщо матриця коефіцієнтів обернених ваг змінюється слабко (до критерію ε), то помилки опорних даних на вирівнювання не впливають.

Як видно з (43) для оцінки апріорі впливу помилок опорних даних не потрібно проводити вирівнювання. Достатньо для цього знайти обернені ваги P_2^{-1} та P_1^{-1} та виконати операції перемноження матриць $A_2P_2^{-1}A^T$, а на останньому етапі виконати порівняння у зміні обернених ваг (43).

Висновки

1. Сформульовану математичну модель (7) та її теоретичний розв'язок (12–18) можна вважати узагальнюючими для вирівнювання даних фототеодолітного знімання у випадку застосування фотограметричних вимірів та різноманітних опорних даних. Використання поняття функції втрат дає можливість опрацьовувати ряди вимірів з негауссовим розподілом помилок.

2. Математичну модель (19) та розв'язок (23) варто застосовувати для загального випадку фототеодолітного знімання з високоточними опорними даними, які можна отримати, виконуючи традиційні геодезичні роботи або GPS-спостереження.

3. Дослідження впливу помилок опорних даних на процес спільного вирівнювання фотограметричних вимірів та опорних даних дало змогу визначити умови, коли помилками опорних даних практично можна знехтувати.

Отже, отриманий теоретичний розв'язок вирівнювання даних фототеодолітного знімання та апостеріорна оцінка точності (23) можуть бути використаними для створення нових алгоритмів та програм для розширення функціональних можливостей аналітичних фотограметричних приладів та цифрових станцій.

1 Бруевич П.Н. Фотограмметрия. М., 1990. 2. Ганьшин В.Н. Вес измерения: его сущность и практическое применение // Геодезия и картография. 1982. № 2. С.14–15. 3. Дорожинский А.Л. Уравнивание в фотограмметрии с учетом ошибок исходных данных // Геодезия, картография и аэрофотосьемка. 1987. № 45. С. 131–137. 4. Дорожинский А.Л. Уравнивание в фотограмметрии разнородных измерений и опорных данных // Геодезия, картография и аэрофотосьемка. 1988. № 47. С. 112–116. 5. Дорожинский А.Л. Теория и технология методов аналитической фотограмметрии в автоматизированных геологических комплексах и системах. Дисс. ... докт. техн. наук. Львов. 1998. 6. Dorozynsky A., Moskal N. Mathematical models of precise photogrammetry survey // «Геодезія, картографія і аэрофотознімання» 1997. № 58. С.198–207. 7. Лобанов А.Н., М.И. Буров, Б.В. Красноnевцев Фотограмметрия. М., 1987. 8. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 9. Сердюков В.М. Фотограмметрия в промышленном и гражданском строительстве. М., 1987. 10. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. К., 1975. 11. Прикладна фотограметрія / Сердюков В.М., Панкратєв Ю.М., Пастух В.В., Мархвіда В.Г., Катушков В.О. К., 1994. 12. Фотограмметрия / Могильный С.Г., Беликов Н.Л., Анохин А.И., Брежнев Н.П., Бордюков Н,П. Київ–Донецьк, 1985.