УДК 528.72

Г.А. МАКСИМЕНКО, Р.М. ТАРТАЧИНСЬКИЙ
Інститут управління природними ресурсами

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ ПЛОЩ ЗЕМЕЛЬНИХ ДІЛЯНОК

Рассмотрена зависимость ошибок площадей от ошибок геодезических измерений и формы площадей. Установлено, что точность определения площадей фигур зависит от точности линейных измерений в геодезических ходах (точности координат) и длины диагоналей фигур. Полученная зависимость позволяет как по полевым измерениям, так и по графических данных просто и надежно оценивать точность определения площади. На основании установленной зависимости можно решать и обратную задачу.

In this paper dependence of the area determination errors on the geodetic measuring and form of the areas was examined. It was established that accuracy of the areas determination depend on accuracy of the line measuring (co-ordinate accurasy) and length of the figure diagonals. Exceeded dependence permit to estimate area determination accuracy simply and reliable as from field measuring such from graphic data, and to solve reverse task.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими завданнями

Проведення приватизації і передача земельних ділянок у приватну власність, продаж земельних ділянок, тобто зміна власників, вимагають нового підходу до визначення меж і площ землевласників. Сьогодні не вигідно знати площу з відносною помилкою 1/400. Купуючи чи продаючи ділянку в 1 га, можна переплатити або недоотримати лише за нормативною оцінкою землі тисячі грн., а за експертною оцінкою це може бути в 10 або і 100 разів більше. У зв'язку з цим, для визначення площ нормативними документами [3] і передбачено їх визначення за значеннями координат межових знаків. Координати межових знаків, їх помилки залежать від точності кутових і лінійних вимірювань у полі.

Не враховуючи цих факторів, можна після виконання польових робіт, обчислення координат і площ отримати незадовільне значення помилки в площі. Щоб цього не було очікувану помилку в площі необхідно передвичисляти ще на стадії складання проекту геодезичних робіт на цій території. Виконані нами дослідження дозволяють без великих затрат це зробити.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз відомої формули для оцінки точності визначення площ показує, що вона в значній мірі залежить і від форми ділянки. Традиційний підхід до оцінки точності площ через коефіцієнт k детально викладений в [1, 2, 4] та інших джерелах.

Для дослідження взяті класичні геометричні фігури та аналітичні визначення їх площ. При цьому помилки сторін фігур розглядались як незалежні величини. Використовуючи теорію помилок, аналітично визначені середні квадратичні помилки фігур. Результати цих обчислень наведені в табл. 1.

Як і в інших друкованих джерелах традиційно дослідження почались із залежності помилки в площі прямокутника зі сторонами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$

$$P = a \cdot b\,. \tag{1}$$

Після диференціювання та переходу до середньої квадратичної помилки одержимо

$$m_p^2 = m_a^2 b^2 + m_b^2 a^2 . \tag{2}$$

Беручи до уваги, що помилки в сторонах a і b незалежні, а згідно з принципом рівних впливів вони ще і рівні між собою, отримаємо

$$m_t^2 = m_a^2 + m_b^2 = 2m_a^2 = 2m_b^2 . \tag{3}$$

Тоді

$$m_p^2 = m_t^2 \frac{\left(a^2 + b^2\right)}{2}. \tag{4}$$

Невирішена частина проблеми

У роботі [1] автори констатували, що $\left(a^2 + b^2\right)$ є діагональ, але далі діяли іншим способом – зв'язуючи сторони і кути між ними аналітичними залежностями. Інший шлях обрано і в роботі [5]. Що стосується m_t, то ні в [1], ні в [5] немає розкриття фізичного змісту цієї величини.

Постановка задачі

Враховуючи вищенаведене, основною метою статті є встановлення залежності між точністю геодезичних вимірювань, формою ділянок і точністю площ.

Точність положення точки на плані залежить від помилок кутових і лінійних вимірювань і визначається формулою

$$m_t = \sqrt{m_l^2 + \left(\frac{m_\beta}{\rho} l\right)^2} \tag{5}$$

Для розрахунків приймемо, що $m_l = 10\,мм$ (СТ-5), $m_\beta = 5''$ (Т5). Тоді для лінії в 100 м матимемо

$$m_t = \sqrt{(0{,}01)^2 + \left(\frac{5 \cdot 100}{2 \cdot 10^5}\right)^2} = 0{,}01 м .$$

З наведеного розрахунку видно, що основним джерелом помилок є помилки лінійних вимірювань, тобто

$$m_a = m_b = m_l = \frac{m_t}{\sqrt{2}} .$$

У прямокутнику, в якому сторона b перпендикулярна стороні a, m_a і m_b, можна розглядати як величини m_x і m_y і тоді

$$m_t^2 = 2m_x^2 = 2m_y^2 . \tag{6}$$

Величину m_t можна розглядати як помилку графічного визначення координат на плані.

При проектуванні польових робіт для визначення очікуваної помилки в площі m_t можна приймати таким, що дорівнює m_l, тобто точності лінійних вимірювань.

При визначенні координат прокладеного полігонометричного чи теодолітного ходів m_t є не що інше, як абсолютна помилка в приростах координат, тобто

$$m_t = f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} . \tag{7}$$

З врахуванням викладеного, формулу (4) можна записати у вигляді

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{2} d^2 , \tag{8}$$

де $d^2 = a^2 + b^2$.

Якщо сторона $a = b$, тобто ми маємо квадрат , то

$$m_p^2 = m_a^2 a^2 + m_a^2 a^2 = 2a^2 m_a^2 ;$$

але

$$2a^2 = d^2 ; \quad m_a^2 = \frac{m_t^2}{2}.$$

Тоді

$$m_p^2 = \frac{m_t}{2} d^2 . \tag{9}$$

Порівняємо визначені залежності помилок у площах прямокутника і квадрата з даними формули (таблиця)

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{8} \sum \left\{ (x_{i-1} - x_{i+1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2 \right\}. \tag{10}$$

У прямокутнику будемо мати чотири значення діагоналі згідно з виразом у фігурних думках . Тоді

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{8} 4d^2 = \frac{1}{2} m_t^2 d^2 . \tag{11}$$

Вираз (11) збігається з виразом (8).

У квадраті також в дужках буде $4d^2$.

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{8} 4d^2 = \frac{1}{2} m_t^2 d^2 . \tag{12}$$

Вираз (12) збігається з виразом (9).

Складнішим є визначення середньої квадратичної помилки в площі трапеції .

Площа трапеції визначається формулою

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} .$$

Частковий диференціал і середня квадратична помилка в площі будуть

$$dp = \frac{da}{2} h + \frac{dh}{2} a + \frac{db}{2} h + \frac{dh}{2} b .$$

$$m_p^2 = \frac{1}{4} h^2 m_a^2 + \frac{1}{4} a^2 m_h^2 + \frac{1}{4} h^2 m_b^2 + \frac{1}{4} b^2 m_h^2 .$$

Після згрупування членів отримаємо

$$m_p^2 = \frac{1}{4} h^2 \left(m_a^2 + m_b^2 \right) + \frac{1}{4} m_h^2 \left(a^2 + b^2 \right). \tag{13}$$

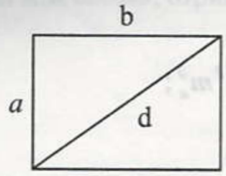
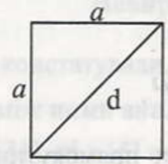
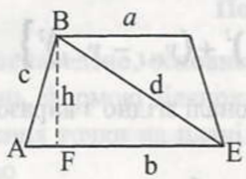
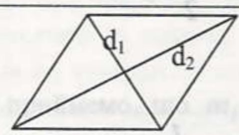
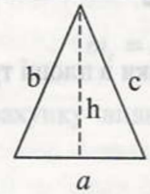
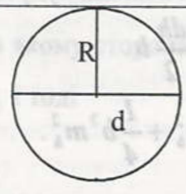
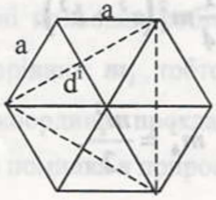
Для подальших розрахунків приймаємо, що

$$m_a = m_b = m_c = m_s , \text{ а } m_h^2 = \frac{m_c^2}{2}. \tag{14}$$

Формула (13) набуде вигляду

$$m_p^2 = \frac{1}{2} m_s^2 \left(h^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right). \tag{15}$$

Залежності помилок у площах прямокутника і квадрата

№ рис.	Форма фігури	Рисунок фігур	Площа P	m_p^2 (аналітичн.)	m_p^2 (за формул.)
1	прямокутник		$a \cdot b$	$\frac{1}{2}m_s^2 d^2$	$\frac{1}{2}m_t^2 d^2$
2	квадрат		$a \cdot a$	$\frac{1}{2}m_s^2 d^2$	$\frac{1}{2}m_t^2 d^2$
3	трапеція		$\frac{a+b}{2}h$	$\frac{1}{2}m_s^2 d^2$	$\frac{1}{2}m_t^2 d^2$
4	ромб		$\frac{1}{2}d_1 d_2$	$\frac{1}{2}m_s^2\left(\frac{d_1^2+d_2^2}{2}\right)$	$\frac{1}{2}m_t^2\left(\frac{d_1^2+d_2^2}{2}\right)$
5	трикутник		$\frac{1}{2}ah$	$\frac{3}{8}m_s^2 c^2$ $\frac{1}{2}m_s^2 h^2$	$\frac{3}{8}m_t^2 c^2$ $\frac{1}{2}m_t^2\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$
6	круг		πR^2	$\frac{1}{2}m_s^2\frac{d^2}{2}$	
7	багатокутник		$\frac{6}{2}ah$	$\frac{1}{2}m_s^2\frac{3(d')^2}{2}$	$\frac{1}{2}m_t^2\frac{3(d')^2}{2}$

З трикутника FBE маємо

$$d^2 = (BF)^2 + (EF + FA)^2 = h^2 + (a+k)^2. \tag{16}$$

де $k = \dfrac{b-a}{2}$.

Після певних перетворень отримаємо

$$d^2 = h^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{4}. \tag{17}$$

З трикутника ABF сторона C буде

$$C^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{4}. \tag{18}$$

Підставимо значення h^2 із формули (18) в (17)

$$d^2 = c^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{4} = c^2 + ab.$$

$$d^2 = c^2 + ab. \tag{19}$$

Запишемо формулу (15) у вигляді

$$m_p^2 = \frac{1}{2} m_s^2 \left(h^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + ab - ab \right).$$

Вираз в дужках являє собою

$$c^2 + ab = d^2.$$

Тоді

$$m_p^2 = \frac{1}{2} m_s^2 d^2. \tag{20}$$

За формулою (10) маємо

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{8} 4d^2 = \frac{1}{2} m_t^2 d^2, \tag{21}$$

що збігається з формулою (20).

Площа ромба визначається за формулою

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2. \tag{22}$$

Відповідно до цього середня квадратична помилка в площі буде

$$m_p^2 = \frac{1}{4}\left(d_2^2 m_{d_1}^2 + d_1^2 m_{d_2}^2 \right).$$

Помилку в діагоналях замінимо на помилку в стороні a. Згідно з рисунком

$$m_s^2 = \frac{1}{2} m_{d_1}^2 + \frac{1}{2} m_{d_2}^2.$$

Приймемо, що $m_{d_1} = m_{d_2} = m_d$, тоді

$$m_s^2 = m_d^2. \tag{23}$$

При цьому формула (22) набуде вигляду

$$m_p^2 = \frac{1}{2} m_s^2 \left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{2} \right). \tag{24}$$

Згідно з формулою (10) вираз в дужках буде

$$2d_1^2 + 2d_2^2.$$

і помилка в площі набуде вигляду

$$m_p^2 = \frac{m_l^2}{8}\left(2d_1^2 + 2d_2^2\right) = \frac{m_l^2}{4}\left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

або

$$m_p^2 = \frac{1}{2} m_s^2 \left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}\right). \quad (25)$$

Визначення середньої квадратичної помилки в площі трикутника розглянемо на прикладі рівностороннього трикутника зі сторонами $a, b, c,$ де $a = b = c$.

Площа трикутника визначається за формулою

$$P = \frac{1}{2} bh. \quad (26)$$

Середня квадратична помилка в площі буде

$$m_p^2 = \frac{1}{4} h^2 m_b^2 + \frac{1}{4} b^2 m_h^2. \quad (27)$$

Замінимо в формулі (27) висоту h через сторони трикутника

$$h^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} c^2. \quad (28)$$

Середня квадратична помилка m_h буде

$$m_h^2 = \frac{3}{4} m_c^2. \quad (29)$$

Підставимо значення (28) і (29) в формулу (27)

$$m_p^2 = \frac{1}{4}\frac{3}{4} c^2 m_b^2 + \frac{1}{4} b^2 \frac{3}{4} m_c^2.$$

У рівносторонньому трикутнику

$$a = b = c \text{ і } m_c = m_b = m_s. \quad (30)$$

Тоді

$$m_p^2 = \frac{3}{8} m_s^2 c^2. \quad (31)$$

Визначимо цю помилку за формулою (10).

В дужках отримаємо суму $a^2 + b^2 + c^2 = 3c^2$.

Підставимо це значення в формулу (10)

$$m_p^2 = \frac{m_l^2}{8} 3c^2 = \frac{3}{8} m_l^2 c^2 \quad (32)$$

тобто той самий результат, що і за формулою (31).

Площа круга визначається формулою

$$P = \pi R^2. \quad (33)$$

Середня квадратична помилка в площі буде

$$m_p^2 = 4\pi^2 R^2 m_R^2. \quad (34)$$

У формулі (34) $4R^2 = d^2$. Тоді

$$m_p^2 = \pi^2 d^2 m_R^2. \quad (35)$$

Замінимо помилку в радіусі через помилку в довжині кола

$$S = \alpha R. \quad (36)$$

Звідки

$$m_s^2 = \alpha^2 m_R^2,$$

Для всього кола

$$\alpha^2 = 4\pi^2$$

$$m_s^2 = 4\pi^2 m_R^2$$

Звідки

$$m_R^2 = \frac{m_s^2}{4\pi^2}. \qquad (37)$$

Підставимо отримане значення в формулу (35).

$$m_p^2 = \frac{\pi^2 d^2}{4\pi^2} m_s^2 = \frac{1}{4} m_s^2 d^2. \qquad (38)$$

За формулою (10) площу круга визначити неможливо.

Розглянемо аналітичне визначення помилки в площі багатокутника. Для прикладу візьмемо рівносторонній шестикутник.

У такому шестикутнику буде шість рівносторонніх трикутників.

Помилка в площі окремого трикутника визначається за формулою (31).

У шести трикутниках помилка буде

$$m_p^2 = \frac{3 \cdot 6}{8} m_s^2 c^2 = \frac{9}{4} m_s^2 c^2. \qquad (39)$$

За формулою (10) в такому шестикутнику буде шість псевдодіагоналей. Тоді

$$m_p^2 = \frac{m_t^2}{8} 6 d'^2 = \frac{3}{4} m_t^2 d'^2. \qquad (40)$$

Замінимо довжину сторін c з формули (39) на значення псевдодіагоналей d'

$$m_p^2 = \frac{9}{4} m_s^2 \frac{d'^2}{3} = \frac{3}{4} m_t^2 d'^2. \qquad (41)$$

Висновки

Виведені формули різними методами мають строгий характер і загальну закономірність : **середня квадратична помилка виміряної площі дорівнює середній квадратичній помилці визначення координат (положення) межових знаків ділянки помножене на середнє значення діагоналей (псевдодіагоналей) ділянки (за виняткам круга і трикутника).** При оцінці точності площ можна користуватись як графічною точністю планів, так і аналітичними даними, отриманими з польових вимірювань.

1. Маслов А.В., Юнусов А.Г., Горохов Г.Н. Геодезические работы при землеустройстве. – М. Недра, 1976. 2. Цилль В. Инженерная геодезия. – М.: Недра, 1974. 3. Керівний технічний матеріал з інвентаризації земель населених пунктів (наземні методи). ГКНТА – 3.01.05-93. – К.: ГУГК, 1993. 4. Перович Л.М., Волосецький Б.І. Основи кадастру. – Львів, 1999. 5. Літнарович Р.М. Теоретичне обгрунтування точності геодезичних робіт при інвентаризації земель // Інженерна геодезія. – К., 2000. – № 41.