

А. Л. ОСТРОВСКИЙ, А. С. СУЮНОВ

**ТУРБУЛЕНТНЫЙ МЕТОД УЧЕТА  
ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ  
В УСЛОВИЯХ СРЕДНЕЙ АЗИИ**

Турбулентный метод учета вертикальной рефракции [1] основан на свойстве атмосферы всегда стремиться под действием силы тяжести к устойчивой стратификации, которая имеет место при инверсиях температуры ночью, ранним утром, поздним вечером, когда холодные, более плотные, а следовательно, более тяжелые слои воздуха находятся внизу, а более легкие — сверху. При этом отсутствует термическая турбулентность и нет колебаний изображений визирных целей.

С восходом Солнца происходит нагрев подстилающей поверхности, а от нее и самых нижних, приземных слоев воздуха. Инверсионное строение температуры воздуха разрушается, появляются адиабатические градиенты температуры  $u_n$ . Это также еще время спокойных изображений визирных целей и нейтральной стратификации воздушных масс.

В это время по всем направлениям тригонометрической сети имеет место только нормальная вертикальная рефракция, которую можно определить по формуле

$$\delta_n = 0,198 \frac{P}{T^2} \cdot S, \quad (1)$$

где  $P$  — давление воздуха,  $T$  — абсолютная температура воздуха,  $S$  — расстояние от инструмента до визирной цели, км.

Однако такое состояние атмосферы длится в условиях Средней Азии при ясной, антициклонной погоде порядка 10...15 мин. Дальнейший нагрев нижних слоев воздуха приводит к тому, что его нагретые частицы под действием выталкивающих Архимедовых сил поднимаются с ускорением вверх, попадают в более холодные слои, отдают им свое тепло и под действием силы тяжести опускаются вниз, пытаясь достичь устойчивого равновесия. Однако из-за выталкивающего действия Архимедовых сил частицам длительное время удается достигать только нейтральной стратификации.

Определим, при каких вертикальных градиентах температуры атмосфера будет равновесной. Как известно, плотность воздуха  $\rho_v$  определяется по формуле

$$\rho_v = \frac{P}{R_v T}, \quad (2)$$

где  $R_v = 287,05 \frac{\text{Дж}}{\text{кг.град.}}$  — газовая постоянная для воздуха.

Логарифмируя (2), имеем

$$\ln \rho_v = \ln P - \ln R_v - \ln T. \quad (3)$$

После дифференцирования (3) получим

$$\frac{d\rho_b}{\rho_b} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}. \quad (4)$$

Вес  $dP$  элементарного столбика воздуха высотой  $dZ$  выражается формулой

$$dP = \rho_b g dZ, \quad (5)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Знак минус означает, что давление воздуха уменьшается с высотой.

В соответствии с (2)

$$P = \rho_b R_b T. \quad (6)$$

Подставляя в (4) значения  $dP$  и  $P$  из формул (5) и (6), имеем

$$\frac{d\rho_b}{\rho_b} = -\frac{g}{R_b T} dz - \frac{dT}{T}. \quad (7)$$

Далее из (7) найдем  $d\rho_b$ :

$$d\rho_b = -\frac{\rho_b g}{R_b T} dz - \rho_b \frac{dT}{T}. \quad (8)$$

Отсюда

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho_b}{T} \left( -\frac{g}{R_b} - \frac{dT}{dz} \right). \quad (9)$$

Знак градиента плотности  $\frac{d\rho}{dz}$  зависит от знака выражения формулы (9), стоящего в скобках:

1) если  $\left( -\frac{g}{R_b} - \frac{dT}{dz} \right) < 0$ , т. е., если

$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{R_b}$ , то  $\frac{d\rho}{dz} < 0$  — плотность воздуха убывает с высотой;

2) если  $\left( -\frac{g}{R_b} - \frac{dT}{dz} \right) = 0$ , т. е., если

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{R_b}, \quad \text{то } \rho_b = \text{const}; \quad (10)$$

3) если  $-\frac{dT}{dz} > \frac{g}{R_b}$ , то  $\frac{d\rho}{dz} > 0$ , т. е. плотность с высотой возрастает.

Воспользуемся формулой (10), которая и решает поставленную задачу.

Учитывая, что  $g = 9,80616 \text{ м/с}^2$ , имеем  $\gamma = \frac{dT}{dz} = -0,0342 \text{ К/м}$ .

Градиент  $\gamma$  состоит из нормальной (адиабатической) части  $\gamma_n$  и аномальной части  $\gamma_a$ :

$$\gamma = \gamma_n + \gamma_a. \quad (11)$$

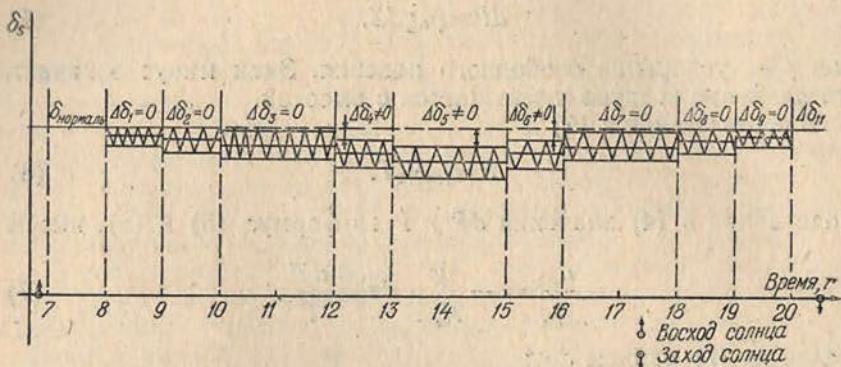


Рис. 1. Суточный ход амплитуды колебаний изображений визирной цели.

Учитывая, что  $\gamma_n = -0,0098 \text{ К/м}$ , найдем аномальный градиент  $\gamma_a$ , при котором частицы воздуха еще вероятно могут достигать состояния нейтрального равновесия.

Имеем  $\gamma_a = -0,0244 \text{ К/м}$ . Таковы теоретические предположения.

В поле зрения трубы движение частиц воздуха проявляется как колебания визирных целей со всеувеличивающей амплитудой  $A$  (рис. 1). При этом, несмотря на возрастание амплитуды колебаний, верхние пики колеблющихся изображений будут находиться на одном уровне, которому соответствует равновесная стратификация воздуха, а зенитные расстояния искажены только нормальной рефракцией. В течение всего периода времени, когда частицам воздуха удается вернуться в равновесное состояние, можно применить наиболее простой вариант турбулентного метода учета вертикальной рефракции, а именно: достаточно вести наблюдения как обычно, но не на среднее положение колеблющейся цели, а на верхние пики максимальных колебаний этой цели и в измеренные зенитные расстояния вводить поправки за нормальную рефракцию. Опыт таких наблюдений уже имеется.

Наблюдатель наводит горизонтальную нить сети зрительной трубы несколько выше верхнего среза визирного цилиндра и следит за тем, достигает ли (касается ли) верхний срез цилиндра (при максимальных пиках колебаний) горизонтальной нити. Если не достигает, то объективная часть трубы микрометральным винтом несколько опускается вниз, чтобы такие касания (момент с отсутствием просвета между горизонтальной нитью и верхним срезом цилиндра) имели место. После этого отсчитывается оптический микрометр.

Исправленное значение зенитного расстояния  $Z_{\text{исп}}$  находят по формуле

$$Z_{\text{исп}} = Z_{\text{изм}} + 0,198 \frac{P}{T^2} \cdot S. \quad (12)$$

Описанный метод учета вертикальной рефракции испытывался научной геодезической экспедицией кафедры геодезии Львовского политехнического института в юго-восточной части пустыни Каракум. В период наблюдений атмосфера была достаточно прозрачной для наблюдений на дистанциях до 5 км.

Геодезические наблюдения на каждом пункте сети включали круглосуточные измерения зенитных расстояний оптическими теодолитами Theo 010B в четные часы суток — 2, 4, 6, ..., 22, 24 ч. Дополнительно измерялись зенитные расстояния в 9 и 19 ч. Именно в это время наступали утренние и вечерние периоды спокойных изображений визирных целей.

Каждая часовая программа серии измерений зенитных расстояний состояла из следующих действий:

а) горизонтальная нить сетки наводилась при КЛ на среднее положение колеблющегося верхнего среза визирного цилиндра и производилось отсчитывание оптического микрометра. Действие повторялось дважды;

б) горизонтальная нить наводилась на верхнее положение верхнего среза колеблющегося визирного цилиндра, как описано выше, и снова производилось отсчитывание. Действие повторялось дважды;

в) труба переводилась через зенит и повторялись при КП действия, указанные в пунктах «б» и «а».

Если колебания изображений отсутствуют, выполняются только действия, указанные в пункте «а».

Пункты триангуляционной сети (рис. 2) представляют собой простые четырехгранные металлические пирамиды высотой 4,5...6,5 м. Центры знаков закреплены в турах, исполняющих одновременно роль штатива и обеспечивающих неподвижность приборов во время наблюдений.

Длины линий сети получены из светодальномерных измерений, а отметки — из геометрического нивелирования I класса и только пункт 3 — из геометрического нивелирования II класса.

В результате получены: а) зенитные расстояния, искаженные нормальной и аномальной частями рефракции, когда на-

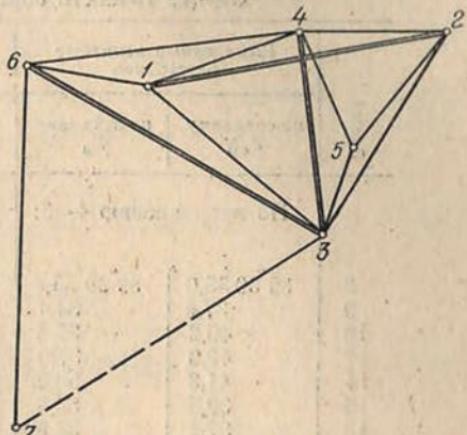


Рис. 2. Схема экспериментальной сети.

блюдалось среднее положение колеблющейся цели  $Z_{cp}$ ; б) зенитные расстояния, искаженные только нормальной рефракцией, когда наблюдались верхние пики максимальных колебаний визирной цели  $Z_v$ ; в) рефракция в направлениях  $\delta_{cp}$ , если наблюдения ведутся как обычно — на среднее положение колеблющейся визирной цели; г) рефракция в направлениях  $\delta_v$ , если наблюдения ведутся на верхние положения колеблющейся визирной цели.

#### Оценка точности определения рефракции

Время	Измеренные зенитные расстояния		Рефракция			$\Delta$
	по среднему $Z_{cp}$	по верхнему $Z_v$	$\delta_{cp}$	$\delta_v$	$\delta_n$	
По направлению 4—5:						
8	89°30'35,0"	89°30'33,8"	03,0	04,2	02,9	1,3
9	37,0	34,4	01,0	03,6	02,8	0,8
10	40,2	35,8	-02,2	02,2	02,7	-0,5
12	40,3	37,0	-02,3	01,0	02,6	-1,6
14	41,3	36,0	-03,3	02,0	02,6	-0,6
16	39,8	35,5	-01,8	02,5	02,5	0
18	37,4	34,5	00,6	03,5	02,6	0,9
19	37,0	33,0	01,0	03,6	02,6	1,0
20	33,0	31,1	05,0	06,9	02,7	4,2

В таблице приведена часть результатов таких наблюдений при наличии колебаний изображений.

В таблице  $\Delta$  — истинные ошибки, найденные по формуле

$$\Delta = Z_{\text{теор}} - Z_{\text{исп}} = \delta_v - \delta_n. \quad (13)$$

Средние квадратические ошибки  $m$  с учетом рефракции вычислены по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta \cdot \Delta]}{n}}, \quad (14)$$

где  $n$  — число измерений. В результате  $m = 1,4''$ .

Такие малые ошибки  $m$  не всегда имели место. При низком прохождении визирных лучей и большом нагреве подстилающей поверхности температурный напор снизу возрастает, и наступает момент, когда воздушные частицы уже не могут вернуться в равновесное (нейтральное) положение. Происходит, как показано на рис. 1, «недокомпенсация». Это означает, что даже если вести наблюдения на верхние пики колеблющихся изображений визирных целей, то все равно измеренные зенитные расстояния будут искажены не только нормальной частью рефракции, но и некоторой аномальной рефракцией, равной величине «недокомпенсации». Следовательно,

$$\delta_v = \delta_n + \Delta \delta_a, \quad (15)$$

где  $\Delta\delta_a$  — часть аномальной рефракции — «недокомпенсация». Возникает необходимость экспериментально проверить выше приведенные теоретические положения, убедиться в их справедливости и надежно определить, при каких условиях происходит «недокомпенсация».

Изложим сущность такой проверки.

Из наблюдений известны рефракции  $\delta_{cp}$  и  $\delta_b$ , а также нормальная рефракция  $\delta_n$ . На основании этих данных найдем аномальные градиенты температуры  $\gamma_{a_i}$  и рефракционные погрешности «недокомпенсации»  $\Delta\delta_a$ . На основании формулы (15)

$$\Delta\delta_a = \delta_b - \delta_n. \quad (16)$$

Аномальные градиенты температуры  $\gamma_{a_i}$  определим из решения обратных задач рефракции. Для этого воспользуемся формулой вертикальной рефракции [2]

$$\delta_{cp} = -8,132 \frac{P}{T^2} \cdot S(0,0244 + \gamma_a). \quad (17)$$

Решая (17) относительно  $\gamma_{a_i}$ , имеем

$$\gamma_a = 0,123 \frac{T^2}{PS} \delta_{cp} - 0,0244. \quad (18)$$

Представим градиенты температуры  $\gamma_{a_i}$  формулой

$$\gamma_{a_i} = \gamma_0 + C \Delta \delta_{a_i}, \quad (19)$$

где  $\gamma_0$  — искомая часть аномального градиента, при котором  $\Delta \delta_{a_i} = 0$ ;  $C$  — коэффициент, указывающий на возрастание  $\gamma_{a_i}$  при условии, что  $\Delta \delta_{a_i}$  изменяется на  $1,0''$ . Неизвестные  $\gamma_0$  и  $C$  подлежат определению из наблюдений по способу наименьших квадратов.

Составим на основании (19) уравнения погрешностей:

$$\gamma_0 + C \Delta \delta_{a_i} - \gamma_{a_i} = V_i, \quad (20)$$

где  $\gamma_{a_i}$  — свободный член.

Нормальные уравнения в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} n; & \Sigma \Delta \delta_{a_i} \\ \Sigma \Delta \delta_{a_i}; & \Sigma \Delta \delta_{a_i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \gamma_{a_i} \\ \Sigma \Delta \delta_{a_i} \gamma_{a_i} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В формуле (21)  $n$  — число наблюдений.

В обработку включены 180 серий наблюдений зенитных расстояний экспериментальной сети (рис. 3), выполненных днем при наличии колебаний с 8 до 20 ч.

Из решения уравнений (21) найдены неизвестные  $\gamma_0$  и  $C$ . При этом получено  $\gamma_0 = -0,0243$ ;  $C = -0,0053$ . Таким образом, теоретические расчеты полностью подтвердились. Произведена оценка

ка точности найденных неизвестных. Так, ошибка единицы веса вычислена по формуле

$$\mu_{\delta} = \sqrt{\frac{[v_i \cdot v_i]}{n - 2}}. \quad (22)$$

Ошибки искомых неизвестных:

$$m_{\gamma_0} = \frac{\mu_{\delta}}{\sqrt{P_{\gamma_0}}}; \quad (23)$$

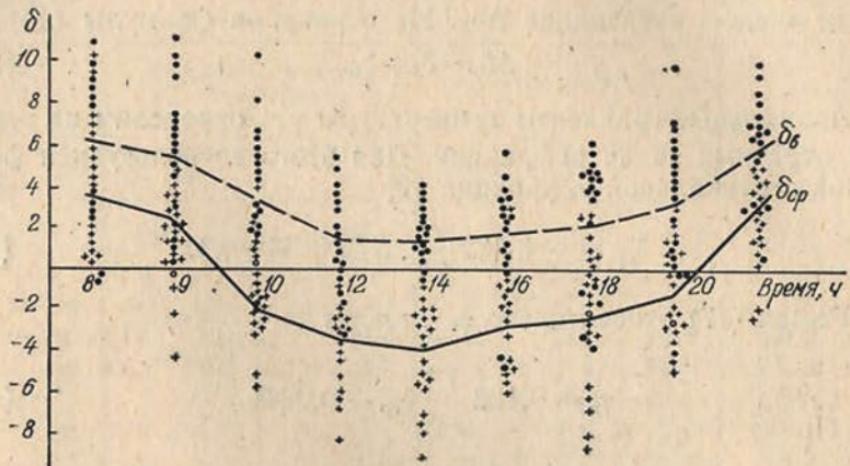


Рис. 3. Аппроксимированный суточный ход вертикальной рефракции.

$$m_C = \frac{\mu_{\delta}}{\sqrt{P_C}}. \quad (24)$$

Веса последнего  $C$  и предпоследнего неизвестного  $\gamma_0$  определены по формулам

$$P_C = \frac{\Sigma n \cdot \Sigma \Delta \delta_{a_i}^2 - \Sigma \Delta \delta_{a_i} \cdot \Sigma \Delta \delta_{a_i}}{\Sigma n \cdot \Sigma n}; \quad (25)$$

$$P_{\gamma_0} = \frac{\Sigma n \cdot \Sigma \Delta \delta_{a_i}^2 - \Sigma \Delta \delta_{a_i} \cdot \Sigma \Delta \delta_{a_i}}{\Sigma \Delta \delta_{a_i} \cdot \Sigma \Delta \delta_{a_i}}. \quad (26)$$

В результате получено:  $\mu_{\delta} = 0,0134$ ;  $P_C = 35,539$ ;  $P_{\gamma_0} = 43,127$ ;  $m_{\gamma_0} = 0,0020$ ;  $m_C = 0,0022$ .

Таким образом, как теоретически, так и экспериментально установлено, что включительно до аномальных градиентов  $\gamma_0 = -0,0244$  град/м, предложенный метод применим.

Дальнейшая задача исследований — определение  $\gamma_{1 \max}$ , т. е. максимального значения вертикального градиента температуры на высоте 1 м и минимальной эквивалентной высоты, при которой турбулентный метод в условиях Средней Азии еще работает. Для этого выберем вычисленные по (18) максимальные значения вертикальных градиентов температуры  $\gamma_{1 \max}$ , для каж-

дого дня наблюдений по всем направлениям экспериментальной сети.

Далее воспользуемся формулой

$$\gamma_{\max_i} = \gamma_{1 \max} / h_{s_i}, \quad (27)$$

где  $h_{s_i}$  — эквивалентные высоты направлений сети, а степень  $y$  и градиент  $\gamma_{1 \max}$  — искомые неизвестные.

Решая (27) относительно  $\gamma_{1 \max}$  и логарифмируя результат, получаем

$$\lg \gamma_{1 \max} = \lg \gamma_{\max_i} + y \lg h_{s_i}. \quad (28)$$

Введем обозначения

$$x = \lg \gamma_{1 \max}; \quad a_i = \lg h_{s_i}; \quad l_i = \lg \gamma_{\max_i}, \quad (29)$$

с учетом которых (28) принимает вид

$$x = a_i y + l_i. \quad (30)$$

Количество уравнений вида (30) в нашем случае равно 26, т. е. количеству от наблюденных направлений сети. Неизвестные  $x$  и  $y$  найдены по способу наименьших квадратов. При решении поставленной задачи получены следующие значения:  $y = 0,720$ ;  $x = 0,407$ ;  $\gamma_{1 \max} = -0,391$  К/м.

Произведена оценка точности полученных результатов:  $m_x = -0,146$ ,  $\mu_{y \max} = 0,128$  К/м,  $P_x = 0,759$ ,  $P_y = 0,880$ ,  $m_y = 0,136$ .

Наконец вычислим минимальное значение эквивалентных высот сети  $h_{s_{\min}}$ , при которой можно вести учет рефракции изложенным турбулентным методом. Для этого в формуле (27) положим  $\gamma_{\max_i} = \gamma_0 = 0,0244$  К/м, значения  $\gamma_{1 \max} = -0,391$  и степень  $y = 0,720$ .

Теперь на основании (27) найдем  $h_{s_{\min}}$ , который равен 11,4 м.

Таким образом: 1) предлагаемый турбулентный метод учета рефракции рекомендуется применять в условиях Средней Азии на направлениях с эквивалентными высотами не менее 10 м; 2) измерение зенитных расстояний следует начинать не ранее, чем через 2 ч после восхода Солнца и заканчивать не позднее, чем за 1 ч до его захода; 3) для низких направлений (при  $h_s < 10$  м) наблюдения необходимо прекратить в период с 13 до 15 ч местного времени, когда колебания визирных целей максимальны и имеют место «недокомпенсации» рефракции; 4) доказано, что включительно до значений эквивалентных аномальных градиентов на высоте луча  $\gamma_0 = -0,0244$  К/м предложенный турбулентный метод учета рефракции работает.

1. Джуман Б. М. Зависимость амплитуды колебаний изображений от высоты визирного луча // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 16—21.
2. Островский А. Л. Современные достижения и задачи в области определения и учета вертикальной рефракции // Геодезия и картография. 1985. № 10. С. 30—37.