

ДО ПИТАННЯ ПРО ОЦІНКУ ТОЧНОСТІ В МЕТОДІ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

© Согор А.Р., 2000

В статье выведены формулы для оценки точности в методе наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения матрицы коэффициентов параметрических уравнений.

The expressions for the accuracy estimates in the least-squares method, while is used of the singular value decomposition have been derived.

Нехай маємо деяку виміряну величину $\underline{L}$ та оцінювану величину X , які зв'язані між собою системою параметричних рівнянь поправок*:

$$\underline{A}X + \underline{L} = \underline{V}, \quad (1)$$

* Рисками знизу в цій статті позначені величини, які зведені до рівноточного вигляду [4].

де $\underline{A}$ – матриця коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок; $\underline{V}$ – вектор поправок до результатів вимірів.

Оцінимо точність величини X , тобто знайдемо її середню квадратичну помилку.

В загальному вигляді середня квадратична помилка величини X визначається із формули [2]:

$$m_X^2 = \mu^2 Q, \quad (2)$$

де μ – помилка одиниці ваги; Q – матриця обернених ваг оцінюваної величини.

Для визначення помилки одиниці ваги μ можна скористатись формулою теорії помилок [3]:

$$\mu^2 = \frac{1}{m-n} \cdot \underline{V}^T \underline{V}, \quad (3)$$

де m – кількість вимірів величини $\underline{L}$; n – кількість параметрів величини X .

Квадратична форма $\underline{V}^T \underline{V}$ у білінійному вигляді запишеться

$$\underline{V}^T \underline{V} = \underline{L}^T \underline{A} X + \underline{L}^T \underline{L}. \quad (4)$$

Використаємо сингулярний розклад матриці $\underline{A}$. Тобто

$$\underline{A} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T, \quad (5)$$

де $\underline{U}$ – матриця з ортогональними стовпцями; $\underline{W}$ – ортогональна матриця; $\underline{\Sigma}$ – діагональна матриця сингулярних чисел [6].

Із застосуванням сингулярного розкладу матриці $\underline{A}$ величина $\underline{V}^T \underline{V}$ набере вигляд

$$\underline{V}^T \underline{V} = \underline{L}^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T X + \underline{L}^T \underline{L}. \quad (6)$$

Замість вектора параметрів X підставимо його значення, виведене в [5]:

$$X = -\underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{U}^T \cdot \underline{L}. \quad (7)$$

Тоді отримаємо

$$\underline{V}^T \underline{V} = -\underline{L}^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{U}^T \underline{L} + \underline{L}^T \underline{L}. \quad (8)$$

Застосовуючи відомі співвідношення

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}^T \underline{U} &= I; & \underline{U} \underline{U}^T &\neq I; \\ \underline{W}^T \underline{W} &= I; & \underline{W} \underline{W}^T &= I \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

та властивість оберненої матриці

$$\underline{\Sigma} \underline{\Sigma}^{-1} = I \quad (10)$$

(де I – одинична матриця), вираз (8) запишемо

$$\underline{V}^T \underline{V} = -\underline{L}^T \underline{U} \underline{U}^T \underline{L} + \underline{L}^T \underline{L}. \quad (11)$$

Тоді квадрат середньої квадратичної помилки одиниці ваги μ остаточно набере вигляд

$$\mu^2 = \frac{1}{m-n} \cdot (\underline{L}^T \underline{L} - \underline{L}^T \underline{U} \underline{U}^T \underline{L}). \quad (12)$$

Для обчислення матриці обернених ваг Q скористаємося [1]:

$$Q = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1}. \quad (13)$$

Здійснивши сингулярний розклад матриці $\underline{A}$ за формулою (5), будемо мати

$$Q = \left[(\underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T)^T \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \right]^{-1}. \quad (14)$$

Виконавши транспонування та застосовуючи співвідношення (9), матрицю (14) запишемо

$$Q = \left[\underline{W} \underline{\Sigma} \underline{\Sigma} \underline{W}^T \right]^{-1}. \quad (15)$$

Використовуючи властивості оберненої матриці добутку та ортогональної матриці, остаточно одержимо матрицю обернених ваг оцінюваної величини

$$Q = \underline{W} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{W}^T. \quad (16)$$

Отже, застосовуючи апарат сингулярного розкладу до матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок, ми отримали нові формули для оцінки точності в методі найменших квадратів: для обчислення середньої квадратичної помилки одиниці ваги – формулу (12); для обчислення обернених ваг врівноважених параметрів – формулу (16). Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко одержати елементи μ і Q оцінки точності, практично ігноруючи складну процедуру обертання матриці.

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М., 1977. 2. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М., 1968. 3. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений: Уч. пос. М., 1990. 4. Согор А.Р. Узгодження параметрів референц-еліпсоїда з даними про регіональне гравітаційне поле: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львів, 1996. 18 с. 5. Согор А.Р., Марченко О.М. До питання врахування коваріаційної матриці помилок при обробці геодезичних вимірів // Геодезія, картографія та аерофотознімання, 1999. Вип. 59. С.33–34. 6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. М., 1980.