

**Mgr inż. Karol Dawidowicz, dr inż. Jacek Lamparski, dr hab. Krzysztof Świątek**  
 Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## **METODY OKREŚLANIA WYSOKOŚCI TECHNIKĄ GPS**

© Dawidowicz K., J. Lamparski J., Świątek K., 2001

**Классическое нивелирование во многих случаях может быть заменено спутниковым нивелированием, особенно на местности труднодоступной для классического нивелирования. Это позволяет получить результаты значительно скорее и с большей точностью. В работе сформулирована концепция, относительно определения нормальной высоты с помощью GPS техники. Представлены результаты анализа точности определения высот на основании результатов наблюдений.**

**In many cases classic leveling may be by satellite leveling, especially in the difficult accessible area. It permits to receive the faster and more precision results. The conception of the normal altitude definition by GPS technique was formed in the work. The analysis results of the altitude definition accuracy on the bases of the observation results was presented.**

### **1. Wprowadzenie**

Jedną z podstawowych powierzchni wykorzystywanych w geodezji i najlepiej opisującą kształt Ziemi jest geoida. Jest ona powierzchnią odniesienia w systemie wysokości ortometrycznych. Inną powierzchnią, która przebiega w pobliżu geoidy jest quasigeoida, która związana jest z obowiązującym w Polsce systemem wysokości normalnych. Do wyznaczenia jej kształtu jest konieczna znajomość wysokości normalnych. W terenach nizinnych ich wzajemny odstęp jest rzędu kilku mm. Na terenie województwa warmińsko-mazurskiego nie przekracza 4 mm (M. Barlik, 1994). Zatem na tym obszarze z błędem mniejszym niż 1 cm można określić kształt geoidy i quasigeoidy.

Wraz z powstaniem systemu GPS zaistniała możliwość jego wykorzystania w zagadnieniach związanych z wyznaczeniem wysokości punktów. W wyniku opracowania obserwacji GPS otrzymujemy wysokości elipsoidalne związane z elipsoidą WGS84. Wysokości elipsoidalne nie są związane z ziemskim polem siły ciężkości, więc nie można ich zastosować bezpośrednio w geodezji.

Dokładność wyznaczenia współrzędnych punktów techniką GPS jest wyższa niż w przypadku stosowania metod klasycznych. Wiadomo również, że wyznaczenie współrzędnej pionowej (wysokości) jest tutaj najmniej dokładne. Przyczyną tego są błędy wynikające z nieuwzględnienia w obliczeniach wpływu atmosfery na sygnał biegnący z satelity do anteny czy też nie wymodelowanie położenia centrum fazowego anteny (K. Dawidowicz, 2001).

### **2. Związki wysokości elipsoidalnych z wysokościami normalnymi**

Odstęp  $\xi$  quasigeoidy od elipsoidy w dowolnym punkcie wyznacza się jako różnicę wysokości elipsoidalnej  $h$  i normalnej  $H^n$ . Pomiędzy wysokością elipsoidalną i normalną punktu zachodzi więc następująca zależność:

$$h = H^n + \xi \quad (1)$$

Przejsie od wysokošci elipsoidalnych do wysokošci normalnych wymaga okrešlenia odstepów quasigeoidy od elipsoidy. Wyznaczenie tych odstepów można zrealizowaó wykonujac dodatkowe pomiary niwelacyjne lub wykorzystujac numeryczny model geoidy.

W pierwszej metodzie do interpolacji odstepów wykorzystuje się punkty łączne, czyli punkty majace wyznaczone wysokošci elipsoidalne (za pomocą obserwacji GPS) i wysokošci normalne (przez wykonanie niwelacji w nawiązaniu do reperów sieci wysokošciowej). Okrešlone w punktach łącznych odstepy quasigeoidy od elipsoidy aproksymuje się wielomianem

$$\xi = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} a_{ij} x^i y^j, \quad (2)$$

którego parametry wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów.

Do interpolacji odstepów  $\xi$  i wyznaczenia wysokošci normalnych nowych punktów wykorzystano program GPSTRANS (Gajderowicz, 1992), w którym zastosowano transformację z 7 parametrami.

$$\begin{bmatrix} B^p \\ L^p \\ H^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} dX_s \\ dY_s \\ dZ_s \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} \varepsilon_u \\ \varepsilon_v \\ \varepsilon_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} m. \quad (3)$$

Wysokošci punktów można wyznaczaó w oparciu o równanie drugiego stopnia. W tym przypadku wzór (3) jest rozszerzony o człony opisujace aproksymację kwadratową różnic wysokošci normalnych i elipsoidalnych:

$$H^n = h + \dots + C_{uu}u^2 + C_{uv}uv + C_{vv}v^2. \quad (4)$$

Przy wyznaczeniach wysokošci punktów z wykorzystaniem punktów łącznych bardzo istotną rolę odgrywa ich rozmieszczenie. Punkty te powinny obejmowaó swym zasięgiem wszystkie nowo wyznaczone punkty, a ich liczba nie powinna być mniejsza od 4.

Należy wspomnieó, że dokładność wyznaczenia wysokošci normalnych wyżej wymienionymi metodami zależy w dużej mierze od dokładności wyznaczenia wysokošci elipsoidalnych z obserwacji GPS. Analiza wpływu różnych czynników na dokładność wyznaczenia wysokošci elipsoidalnych została przedstawiona w pracy K. Dawidowicza (Dawidowicz, 2001).

### 3. Analiza uzyskanych wyników

#### Kampania PYRZYCE

W obliczeniach wykorzystano obserwacje GPS wykonane w 1995 r. w ramach kampanii PYRZYCE, w wyniku której wyznaczono współrzędne punktów II klasy. Sieć ta obejmowała obszar ok. 30 x 50 km. Długość sesji obserwacyjnych wynosiła 1-2 godziny. Opracowanie obserwacji wykonano programem firmowym GPPS, sieć wektorów wyrównano programem GEOLAB. Do transformacji wykorzystano 25 punktów łącznych obejmujacych cały mierzony teren.

W tabeli 1 zestawiono wysokošci normalne uzyskane z niwelacji geometrycznej i transformacji programem GPSTRANS (kolumna 3 – stosowano wzór 3, kolumna 4 – stosowano wzór 4).

Porównujac wysokošci normalne uzyskane z niwelacji geometrycznej oraz z pomiarów satelitarnych zauważamy, że różnice wysokošci tylko w czterech przypadkach przekraczają 0,02 m. Również duża zgodność występuje dla wysokošci uzyskanych z równania (3) oraz (4). Tylko w dwóch przypadkach różnica wysokošci otrzymana w wyniku realizacji równania (3) i równania (4) – przekracza 1 cm.

**Zestawienie wysokości normalnych uzyskanych z niwelacji geometrycznej  
i transformacji programem GPSTRANS**

Nr punktu	Wysokość z niwelacji geometrycznej	Wysokość z transformacji – wzór (3)	Wysokość z transformacji – wzór (4)
	(m)	(m)	(m)
4013	82,088	82,079	82,083
5010	66,153	66,149	66,243
6012	39,936	39,913	39,913
6021	50,666	50,659	50,658
1704	41,288	41,296	41,298
1706	34,246	34,250	41,298
2359	24,362	24,360	24,366
2361	26,351	26,329	26,336
2703	44,923	44,937	44,937
2852	17,041	17,029	17,031
4358	68,470	68,479	68,470
4651	61,677	61,660	61,669
4857	77,613	77,642	77,638
5554	49,326	49,325	49,311
5605	88,987	89,004	89,001
3265	70,114	70,096	70,100
3462	61,361	61,363	61,365
3702	81,121	81,151	81,154
6602	26,954	26,955	26,981

### **Kampania NIW 1999**

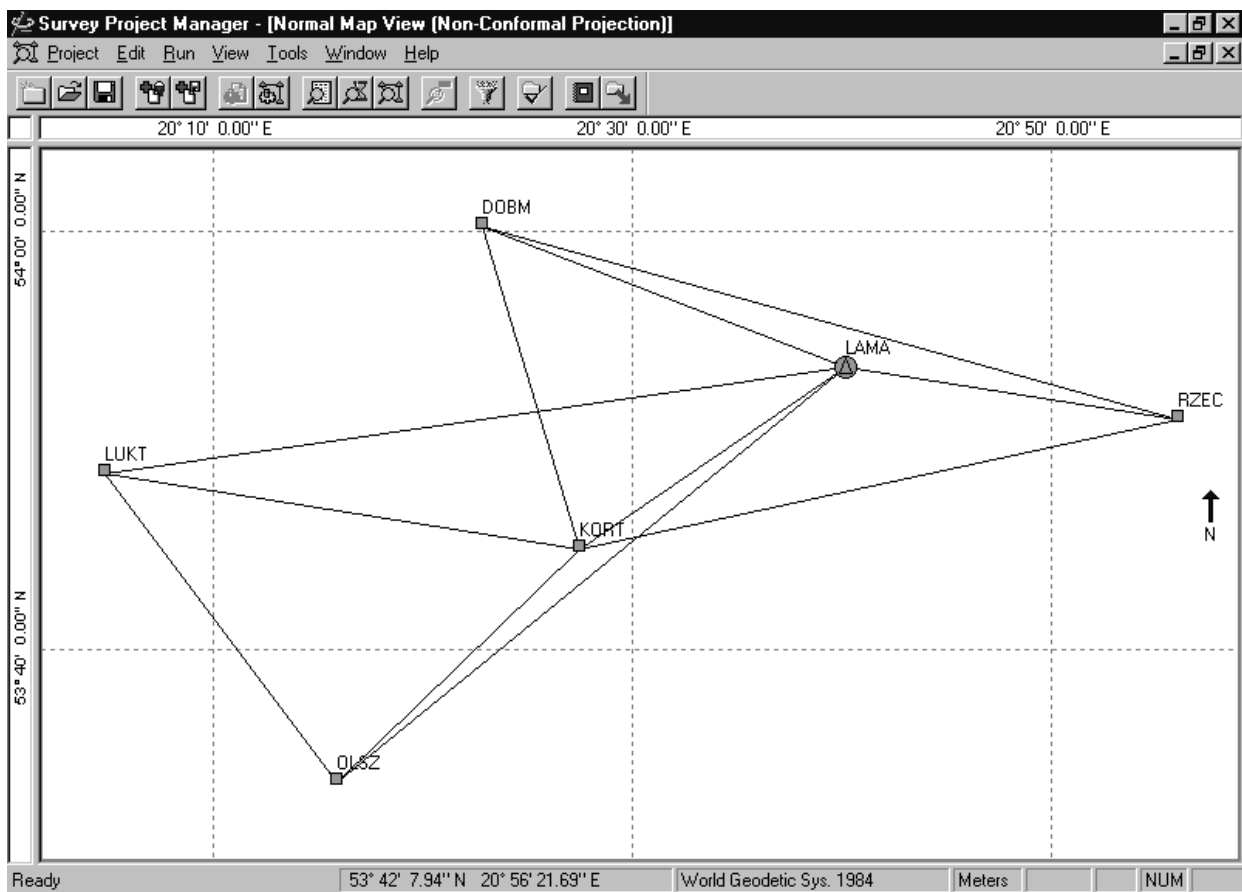
W okolicach Olsztyna założono sieć testową składającą się z sześciu punktów (rys. 1) dla których wykonano pomiary satelitarne GPS i pomiary niwelacyjne. Sieć testowa obejmuje obszar ok. 50 x 58 km. Różnice wysokości między punktami w sieci testowej nie przekraczają 80 m.

W ramach kampanii wykonano dwie ośmiogodzinne sesje:

- pierwsza sesja – punkty LUKT, OLSZ, KORT, LAMA,
- druga sesja – punkty DOBM, RZEC, KORT, LAMA.

Obserwacje opracowano programem BERNESE v 4.0.

W tabeli 2a zestawiono wyniki uzyskane z transformacji oraz z modelu geoidy (Kadaj, Kocoń, 2000). W transformacji przyjmowano zawsze 5 punktów łącznych. Do punktów sieci przedstawionej na rysunku 1 dołączono jeden punkt (nr 1000) oddalony od punktu KORT o ok. 1500 m. Wyniki transformacji z wykorzystaniem sześciu punktów łącznych przedstawiono w tabeli 2b.



Rys. 1. Sieć testowa NIW 1999

Tabela 2a

	KORT	LUKT	OLSZ	DOBM	LAMA	RZEC	1000
<i>H</i> z niwelacji	119,490	94,490	172,564	101,850	157,671	159,474	106,188
<i>H</i> z transformacji	119,533	94,422	172,560	101,887	157,669	159,419	
<i>H</i> z modelu geoidy	119,459	94,501	172,531	101,922	157,691	159,523	106,158

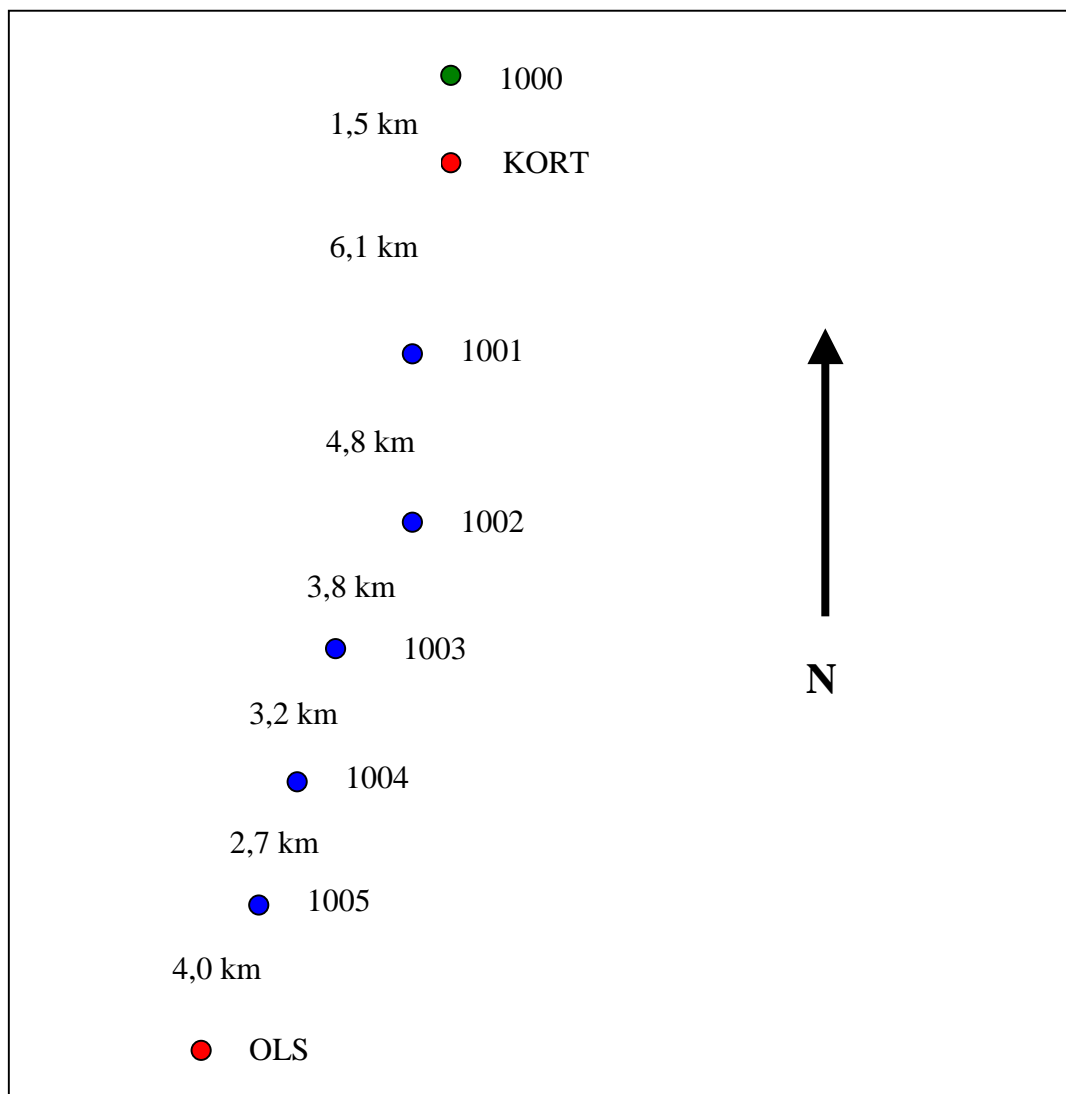
Tabela 2b

<i>H</i> z transformacji	119,494	94,417	172,539	101,882	157,663	159,411	106,185
--------------------------	---------	--------	---------	---------	---------	---------	---------

Jak wynika z przedstawionych rezultatów, punkty leżące poza obszarem obejmowanym przez punkty łączne, mają najgorzej wyznaczone wysokości. Maksymalna różnica wysokości otrzymanych z niwelacji i transformacji wynosi 0,070 m. Dla punktów leżących wewnątrz obszaru objętego przez punkty łączne nie przekracza 0,043 m (tabela 2a) lub 0,008 m (tabela 2b).

### Kampania CIĄG 2000

Między punktami sieci testowej (rys. 1) założono kilka punktów (rys. 2), na których wykonano obserwacje GPS oraz wyznaczono wysokości normalne za pomocą niwelacji geometrycznej. W tabeli 3 zestawiono wysokości uzyskane z niwelacji oraz z transformacji.



Rys. 2. Sieć testowa CIĄG 2000

Tabela 3

	1000	KORT	1001	1002	1003	1004	1005	OLSZ
$H^n$ z niwelacji	106,188	119,490	111,755	149,312	161,690	159,297	168,471	172,564
$H^n$ z transformacji	106,191	119,486	111,768	149,286	161,698	159,297	168,478	172,544
$H^n$ z modelu geoidy (Kadaj)	106,158	119,456	111,728	149,290	161,673	159,274	168,449	172,547

Analizując wyniki z tabeli 3 zauważamy, że tylko dla punktu 1002 różnica wysokości otrzymana z niwelacji geometrycznej i z transformacji przekracza 0,020 m.

#### 4. Określanie wysokości w programie wykonywania przekrojów dolin rzecznych

Metoda satelitarna GPS w ostatnich kilku latach przyjęła się wśród geodetów praktyków jako dobra a czasem niezastąpiona technologia szczególnie w wyznaczeniach współrzędnych poziomych. Wysokości punktów są określane również, ale panuje przekonanie, że są one znacznie mniej dokładne niż współrzędne poziome i że w związku z tym nie można mieć do nich zaufania. Na taką opinię wpłynęły, być może, następujące czynniki:

- wysokość anteny satelitarnej jest odczytywana raz, co może być źródłem błędów,
- nieprawidłowe obliczanie wysokości nowych punktów przez geodetów,
- nieprzywiązywanie wagi do dokładnego obliczenia wysokości przy założeniu, że jest ona niepotrzebna (natomiast podawanie jej w sprawozdaniu).

Do niedawna jeszcze nie określano wysokości znaków punktów III klasy. Wiadomo, że metodą GPS określone są współrzędne w trzech wymiarach – zdecydowało to o możliwości wyznaczenia wysokości punktu. Obecnie każdy punkt III klasy ma określaną wysokość znaku – jest ona określana na drodze klasycznej niwelacji technicznej lub metodą satelitarną.

Szczególnym przypadkiem można nazwać zakrojoną na dużą skalę akcję wyznaczania przekrojów koryt rzecznych, realizowaną obecnie w ramach ogólnopolskiego programu znanego pod potoczną nazwą „Odra – Wisła”.

Opracowywany system ochrony przeciwpowodziowej obejmuje dorzecza Odry i Wisły oraz dolin następujących rzek: Odra ( górne, środkowe i dolne odcinki), Warta, Prosna, Bóbr, Barycz, Bystrzyca, Biała Głuchołaska, Kaczawa, Kwisa, Nysa Kłodzka, Nysa Łużycka, Oława, Osłobłoga, Mała Panew, Ślęza, Widawa, Wisła (górne, środkowe i dolne odcinki), Mała Wisła, Wisłok, San, Wisłoka, Nida, Uszwica, Dunajec, Raba, Skawa, Soła, Przemsza.

Badanie obejmuje doliny rzek w potencjalnym pasie zagrożenia powodzią. Pas pomiaru jest ograniczony przez tak zwaną wodę 1% tj. zasięgiem powodzi o prawdopodobieństwie wystąpienia raz na sto lat, zwaną także wodą stuletnią. Dla gęsto zaludnionych obszarów miejskich zasięg może być rozszerzony do wody dwustuletniej. Wybór długości odcinka i lokalizację oparto na założeniu braku cech ochrony przeciwpowodziowej, tzn. że takie cechy są zniszczone. Założono, że przekroje poprzeczne zostaną sporządzone dla 1,5 km odcinków w górnym i środkowym biegu rzeki, oraz 3 km odcinków dla dolnego biegu rzeki. Długości takie przyjęto na podstawie danych historycznych IMGW, włącznie z katastrofalną powodzią w 1997 roku.

Pomiary i badania obejmują:

- 2750 odcinków,
- łączną długość odcinków – 4998 km
- średnią długość sektora – 1817,4 m

Dane te, dla wszystkich przekrojów poprzecznych rzek zostały zestawione w sumarycznej tabeli (załącznik nr 1).

W ramach tej akcji, obejmującej rzeki dopływowe Odry i Wisły, są określane współrzędne poziome i wysokości tysięcy punktów, zlokalizowanych jako punkty główne, pośrednie i kierunkowe przekrojów dolin rzecznych. Dokładności wyznaczeń tych punktów określone przez specjalistów są następujące:

- współrzędne poziome tak jak punktów osnowy III klasy,
- wysokości tak jak punkty określone drogą niwelacji III klasy.

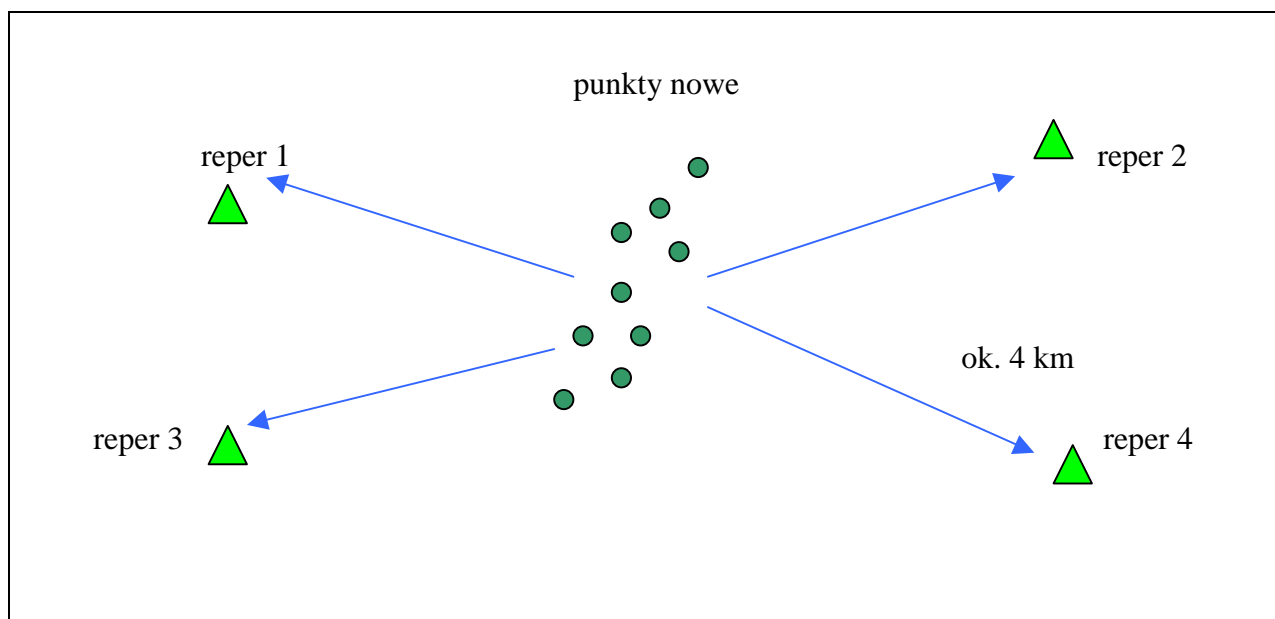
Przekroje rzek są często zlokalizowane w terenie trudno dostępnym, z dala od osnów poziomych i wysokościowych. Powoduje to, że geodeci wykonawcy wolą stosować technologię satelitarną niż klasyczną. W praktyce zdarzają się różne przypadki – należy je rozwiązywać w różny sposób. Poniżej przedstawiono kilka różnych wariantów rozwiązań technologicznych.

W zależności od sytuacji terenowej, takiej jak:

- równomierność rozmieszczenia reperów na danym terenie,
- oddalenie reperów od miejsca pomiaru,
- warunki terenowe, takie jak dostępność punktów, wizury, dojazd, przeprowadza się

analizę wszystkich danych i wybiera optymalny wariant pomiarowo-obliczeniowy.

## Wariant 1: optymalny



Rys. 3. Wariant 1 – optymalny

W przypadku wariantu optymalnego mamy dane wysokości reperów – powinny to być repery niwelacji precyzyjnej I lub II klasy. Punkty wyznaczane są ulokowane w środku obszaru ograniczonego reperami; odległości do reperów sięgają 5 km. Należy zaplanować sesje obserwacyjne tak, aby w przypadku wyznaczania wektorów dowiązujących punkty skrajne sieci do reperów, były one dłuższe – rzędu 70 – 80 minut. W przypadku wyznaczania wektorów krótszych – między punktami sieci, mogą one mieć długość około 50 – 60 minut. Zakłada się oczywiście, że w miejscu pomiaru mamy prawidłowo odkryty horyzont. Przy reperach można założyć odkryte punkty pomocnicze, których wysokości należy zaniwelować (od reperów) bezpośrednio przed pomiarem lub w jego trakcie (dla kontroli tam i z powrotem).

Wyniki analiz uzyskane dla wariantu 1 zestawiono w tabeli 4.

Tabela 4

Nr punktu	$H^n$ z transformacji (m)	$H^n$ z modelu geoidy (Osada) (m)
0201	176,691	176,784
8001	180,550	180,625
1231	186,846	186,925
1601	194,899	194,975
1801	192,912	192,986
2002	198,760	198,828
2582	207,860	207,920
1481	180,960	181,025
1489	175,531	175,626
1541	181,538	181,625
1549	175,401	175,482
1611	188,959	188,999
2101	200,695	200,760

Średnia różnica wysokości (punktów wyszczególnionych w tabeli) obliczonych na podstawie modelu i z transformacji wynosi  $-0,074$  m.

Obliczono także wysokości normalne w punktach będących reperami roboczymi oraz w punktach, których wysokości elipsoidalne wzięto z katalogu. Wyniki zestawiono w tabeli 5.

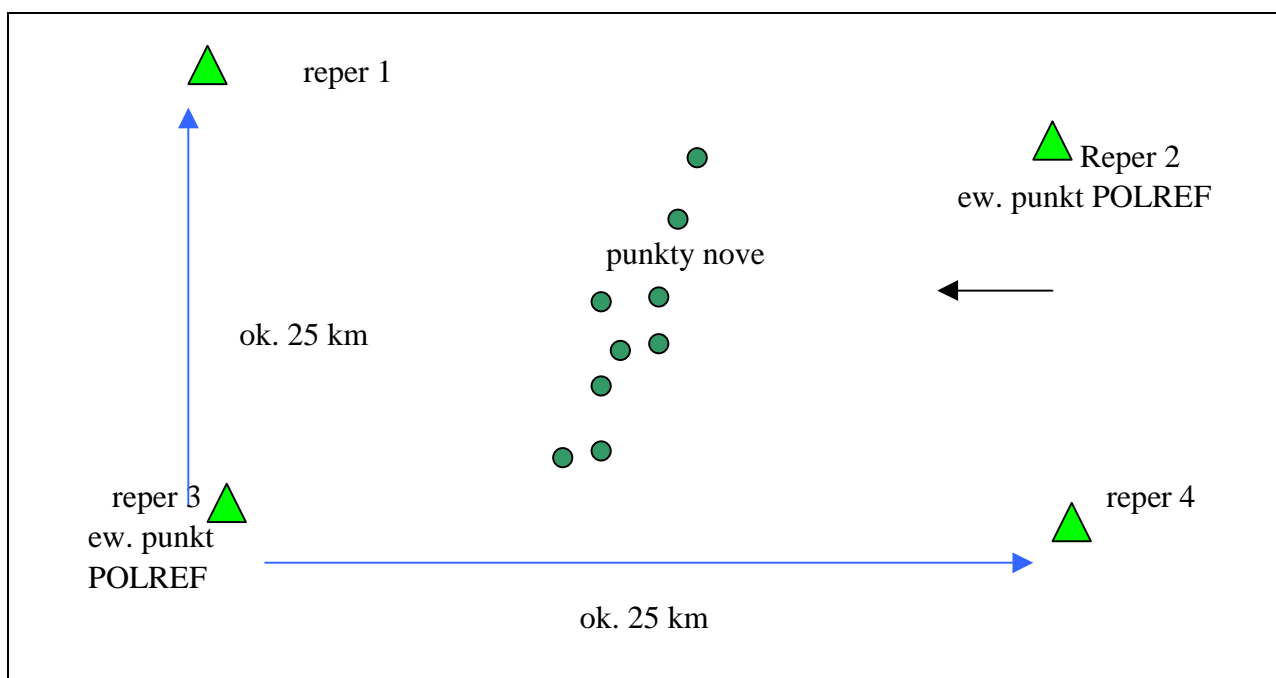
Tabela 5

Nr punktu	$H^n$ z katalogu (m)	$H^n$ z modelu geoidy (Kadaj) (m)	Różnica Wysokości (m)
RATA	239,340	239,359	-0,019
WREP	189,380	189,480	-0,100
RP31	226,140	226,223	-0,083
RAT1	242,560	242,585	-0,025
RSZC	182,000	182,074	-0,074
ROPT	190,091	190,132	-0,041
RPIO	188,474	188,574	-0,100

Średnia różnica wysokości normalnej obliczanej z modelu geoidy i z katalogu wynosi  $-0,063$  m.

Tak samo obliczona różnica dla punktów odniesienia w wyrównaniu sieci satelitarnej, tzn. punktów osnowy poziomej I klasy wynosi  $-0,067$ . Ponieważ w wyrównaniu przyjęto wysokości elipsoidalne punktów I klasy jako stałe, można domniemywać, że elipsoida jest na obszarze pomiaru „przesunięta” o ok. 6,5 cm. Gdyby do wszystkich wartości wysokości elipsoidalnych wprowadzić tę różnicę, to różnice wysokości obliczonych z modelu i obliczonych z transformacji mieściłyby się w granicach błędów wyrównanych wysokości, tzn. ok.  $\pm 1$  cm.

Wariant 2 – warunki mało dogodne.

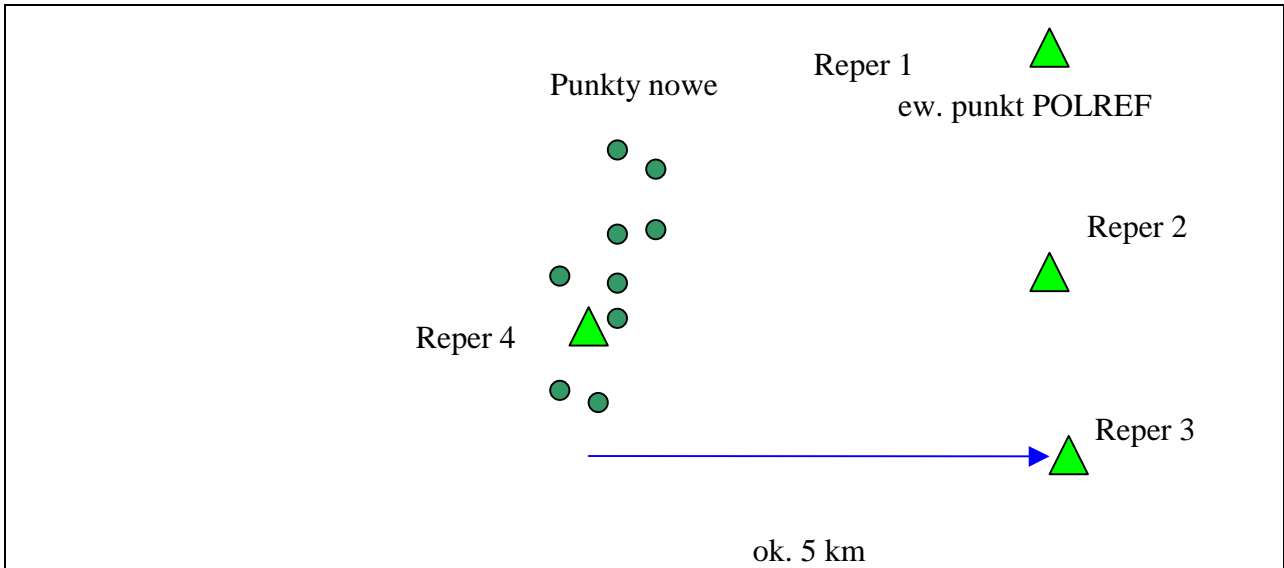


Rys. 4. Wariant 2 – warunki mało dogodne

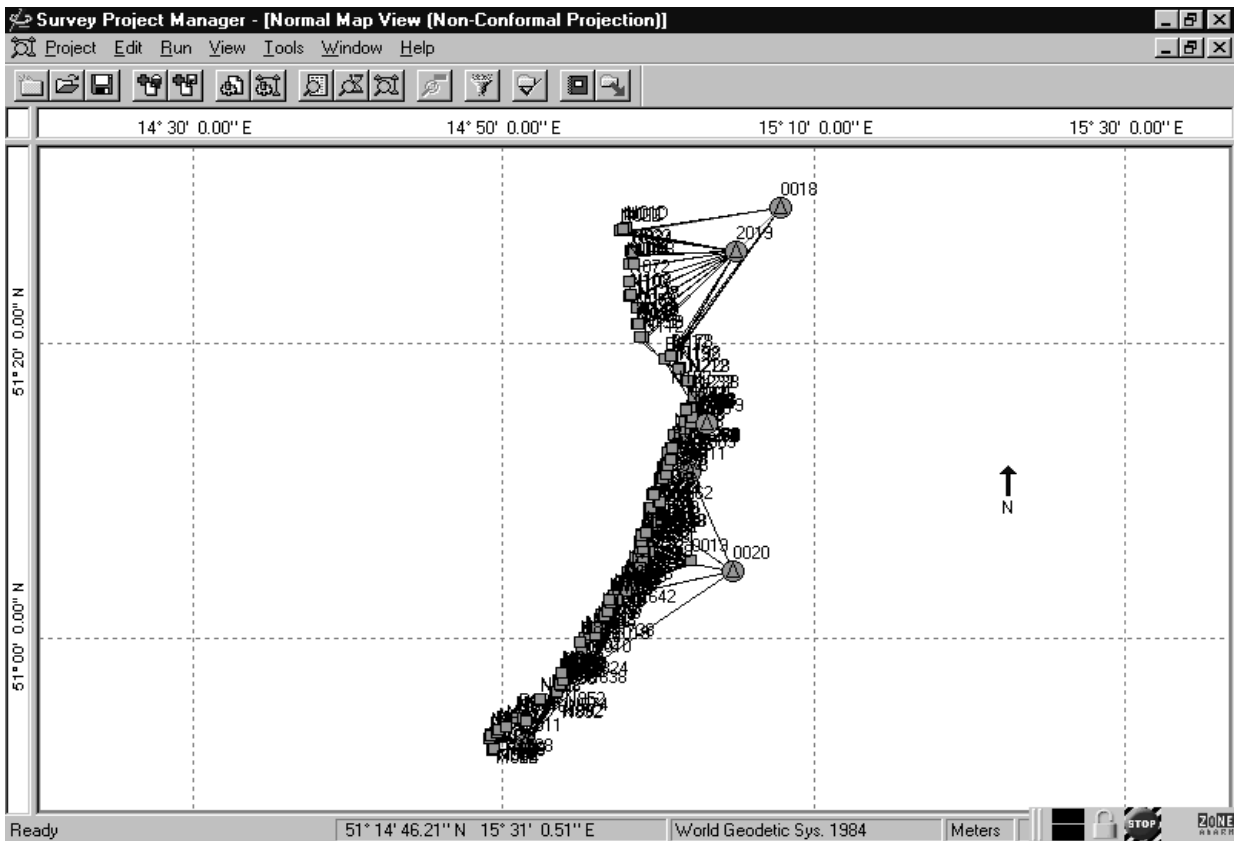


Wariant ten charakteryzuje się dużymi odległościami nowych punktów od reperów oraz możliwością braku reperów – mogą być zastąpione punktami POLREF, które mają wysokości określone na drodze niwelacji technicznej III klasy, a więc mają wysokości mniej dokładne niż repery niwelacji precyzyjnej. Sesje obserwacyjne należy zaplanować podobnie jak w wariancie 1.

Wariant 3 – warunki niedogodne.



Rys. 5. Wariant 3 – warunki niedogodne



Rys. 6. Usytuowanie punktów przy pomiarze obiektu B  
(wariant 3 – warunki niedogodne)

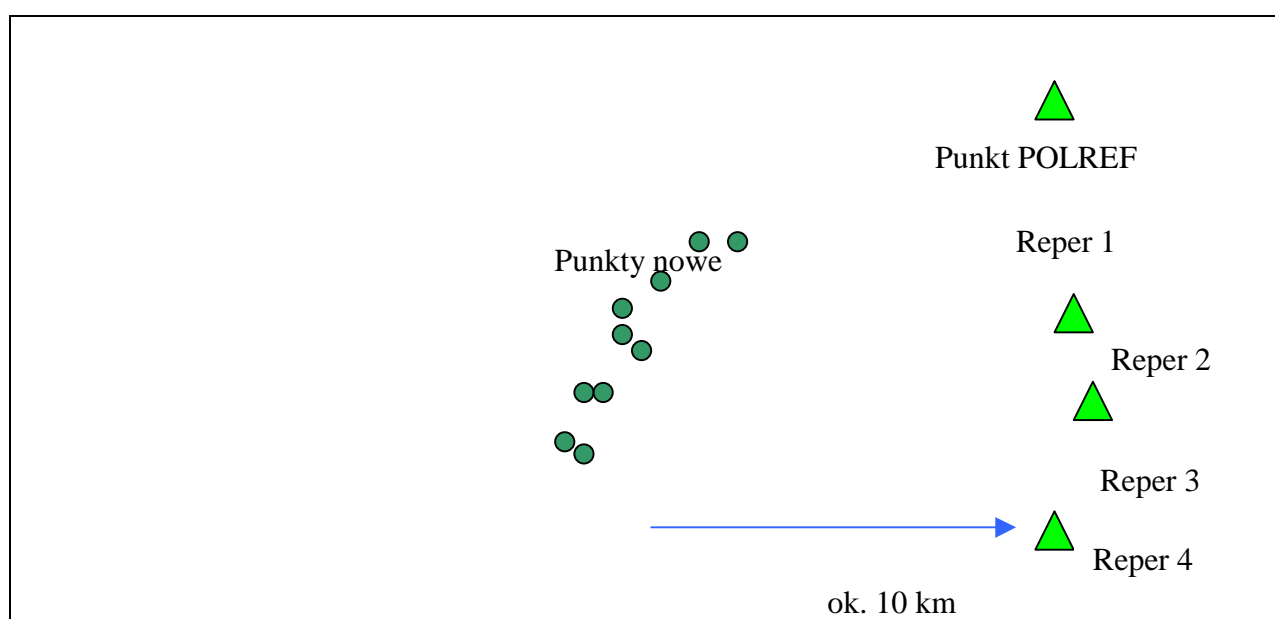
Spośród ponad 200 punktów kampanii obserwacyjnej na obiekcie B wybrano do analizy kilkanaście punktów, równomiernie rozłożonych wzdłuż rzeki. W tabeli 6 zestawiono wysokości wybranych punktów (posiadających wysokości z niwelacji), które obliczono w oparciu o przeprowadzoną transformację oraz w oparciu o model geoidy.

Tabela 6

Nr punktu	$H^n$ z niwelacji (m)	$H^n$ z transformacji (m)	$H^n$ z modelu geoidy (Kadaj) (m)
N048	138,409	138,351	138,465
N098	142,449	142,364	142,441
N108	142,430	142,355	142,432
N332	173,926	173,969	173,962
N402	181,934	182,006	182,004
N448	191,746	191,822	191,811
N652	194,849	194,926	194,886
N682	195,704	195,802	195,756
N928	231,174	231,139	231,128
N942	228,603	228,637	228,631
N958	231,926	231,887	231,881
N968	231,086	231,071	231,065
N998	232,842	232,857	232,855

Średnia różnica wysokości uzyskanych z niwelacji i transformacji wynosi 5,5 cm, a z niwelacji i z modelu geoidy 4,5 cm.

Wariant 4 – warunki skrajnie trudne.



Rys. 7. Wariant 4 – warunki skrajnie trudne

W warunkach skrajnie trudnych, których schemat przedstawiono na rysunku 7, pozostaje tylko obliczenie wysokości w oparciu o model geoidy. Wyniki transformacji nie przyniosą zadowalających rezultatów.

*1. Barlik M., Sprawozdanie z prac grawimetrycznych wzdłuż trawersu geodynamicznego SAGET na odcinku Lamkówko – Borowa Góra, Warszawa, 1994. 2. Dawidowicz K. Analiza wpływu różnych czynników na wyznaczone wysokości elipsoidalne z obserwacji GPS // Materiały konferencji naukowo technicznej., Piwniczna, 10 – 12 maj. 2001. 3. Dawidowicz K. Rozprawa doktorska (w przygotowaniu) Wykorzystanie obserwacji GPS do wyznaczania wysokości, UWM Olsztyn, 2001. 4. Gajderowicz I. Problemy transformowania sieci GPS do układu państwowego "1965", Zeszyty Naukowe ART Olsztyn, 1992. 5. Kadaj R., Kostoń K. GEONET Unitrans – opis programu, 2000.*