

УДК 528.35

Я.М. Костецька, Н.Р.Ревуцька

Національний університет "Львівська політехніка"

ДО ПИТАННЯ ВРІВНОВАЖЕННЯ МЕРЕЖ ТРИЛАТЕРАЦІЇ

© Костецька Я.М., Ревуцька Н.Р., 2001

Приведены результаты уравнивания двух несвободных сетей трилатерации двумя вариантами. В одном из них составлены условные уравнения жесткости в виде уравнений дирекционных углов и координат, а в другом варианте условные уравнения координат заменены условными уравнениями сумм углов. Проведенный эксперимент позволяет утверждать, что оба варианта уравнивания равноценны. Но при втором варианте процесс составления условных уравнений более простой.

Results of balancing of two unfree networks trilateration by two variants are given. In one the conditional equations of rigidity are composed as the equations directional angles and coordinates, and in the other variant the conditional equations of coordinates are replaced by the conditional equations of the sums of angles. The experiment allows to assert, that both variants of an balancing are equivalent. But at the second variant the process of drawing up of the conditional equations of more simple.

Метод трилатерації широко використовується в інженерній геодезії для створення і згущення планової основи при будівництві і обслуговуванні різних інженерних споруд, зокрема і прецизійних [1]. Тому нерідко виникає необхідність попередньої оцінки точності та врівноваження невеликих мереж трилатерації з багатьма вихідними пунктами.

Для оцінки точності запроєктованих та врівноваження створених мереж корелатним способом потрібно скласти умовні рівняння. В мережах трилатерації умовні рівняння складають звичайно в кутовій формі [2, 3], а потім від поправок в кути переходять до поправок у виміряні сторони за однією з відомих формул. Складання умовних рівнянь чотирикутників, центральних систем, суми кутів та дирекційних кутів в кутовій формі не викликає жодних труднощів. Складним і безконтрольним є складання умовних рівнянь координат, які виникають при згущенні існуючої мережі.

Види умовних рівнянь жорсткості не є регламентованими: одні рівняння можна замінити іншими. Тому і виникла думка при врівноваженні мереж трилатерації рівняння координат замінити відповідними рівняннями дирекційних кутів [3], зберігаючи при цьому загальну кількість умовних рівнянь жорсткості.

Дослідження з метою перевірки цього положення проведено на двох конкретних мережах, які нерідко можна зустріти на будівельних майданчиках. Дослідження полягало в наступному.

Після аналізу схеми мереж з надлишковими вихідними пунктами, вихідних даних та виміряних і приведених на площину довжин сторін визначали загальну кількість умовних рівнянь, які виникають в кожній з мереж, за відомою формулою

$$r = n - 2qr, \quad (1)$$

де r – загальна кількість умовних рівнянь, n – кількість виміряних сторін в мережі, q – кількість пунктів в мережі, які визначаються. Далше ми встановлювали види умовних

рівнянь, як це загально прийнято. Умовні рівняння ми склали в кутовій формі і обчислювали вільні члени в них, попередньо рішивши всі трикутники мережі. Перехід від поправок в кути в умовних рівняннях до поправок в сторони здійснювали за відомою формулою, отриманою на основі теореми косинусів. Із рішення нормальних рівнянь отримували поправки у виміряні сторони.

Дальше виконували знову врівноваження цих же мереж, складаючи замість умовних рівнянь координат, умовні рівняння дирекційних кутів або сум кутів, після чого знову склали нормальні рівняння і розв'язували їх. Складання умовних рівнянь дирекційних кутів, які заміняють координатні умовні рівняння, описане нижче.

Отримані поправки в сторони з цього врівноваження порівнювали з поправками, отриманими з попереднього врівноваження. Порівнювали також координати пунктів, обчислені за врівноваженими сторонами, отриманими з першого і другого варіанта врівноваження.

На рис. 1 наведена схема першої мережі. На схемі суцільними лініями показані виміряні сторони, квадратики – вихідні пункти. Ця мережа має 5 вихідних пунктів, а 4 – визначуваних. Вона складається з однієї п'ятипроменевої центральної системи та 4 трикутників. В цій мережі згідно з (1) виникає шість рівнянь: одне рівняння центральної системи, одне рівняння дирекційного кута між вихідними сторонами та чотири рівняння координат: два абсцис і два ординат. В табл. 1 наведені значення координат п'яти вихідних пунктів, а в табл. 2 – значення виміряних сторін.

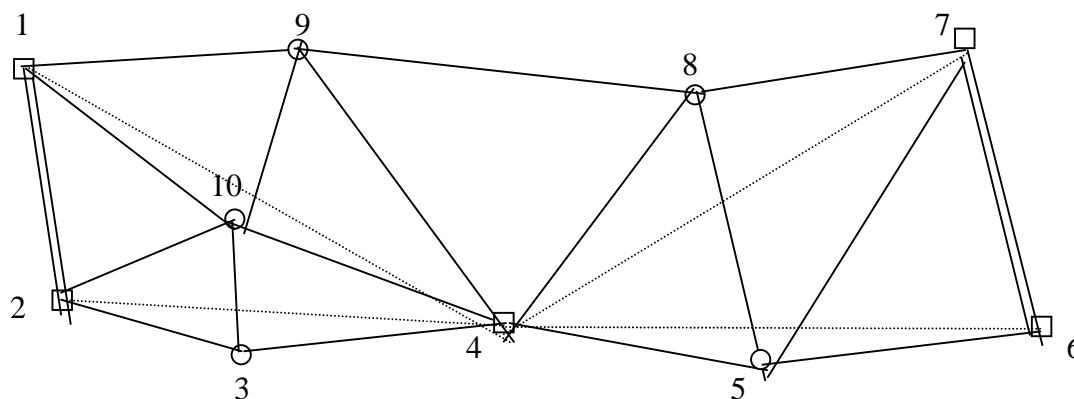


Рис. 1. Схема першої мережі

Таблиця 1

Координати (умовні) вихідних пунктів першої мережі

№№	X, м	Y, м	№№	X, м	Y, м
1	3118,47	1250,00	6	2243,78	7722,00
2	1623,87	1623,87	5	4155,00	6799,40
4	1895,10	4729,97			

В першому варіанті врівноваження мережі складені всі перелічені вище умовні рівняння. Координатні умовні рівняння складено вздовж ходових ліній між пунктами 1 і 4 та пунктами 2 і 7. Отримані поправки у виміряні сторони наведені в стовпці “Поправки першого варіанта” табл. 2.

При другому варіанті врівноваження нами замість чотирьох рівнянь координат складено 4 рівняння дирекційних кутів. Для цього з розв'язку обернених задач обчислені довжини сторін 1-4, 2-4, 4-7 і 4-6 та їх дирекційні кути. Ці сторони на рис. 1 показані

штриховими лініями. Далі для визначення кутових нев'язок та коефіцієнтів нових умовних рівнянь розв'язано трикутники 1-10-4, 2-3-4, 4-8-7 і 4-5-6. Нові умовні рівняння дирекційних кутів в кутовій формі мають вигляд:

$$\begin{aligned}(2-1-10) - (10-1-4) + w_3 &= 0, \\ (1-2-10) + (10-2-4) + w_4 &= 0, \\ (1-4-9) + (9-4-8) + (8-4-7) + w_5 &= 0, \\ (1-4-9) + (9-4-8) + (8-4-7) + (7-4-6) + w_6 &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Відповідно вільні члени рівнянь

$$\begin{aligned}w_3 &= \alpha_{1-2} - \angle(2-1-10) - \angle(10-1-4) - \alpha_{1-4}, \\ w_4 &= \alpha_{2-1} + \angle(1-2-10) + \angle(10-2-4) - \alpha_{2-4}, \\ w_5 &= \alpha_{4-1} + \angle(1-4-9) + \angle(9-4-8) + \angle(8-4-7) - \alpha_{7-6}, \\ w_6 &= \alpha_{4-1} + \angle(1-4-9) + \angle(9-4-8) + \angle(8-4-7) + \angle(7-4-6) - \alpha_{6-7}.\end{aligned}\tag{3}$$

Тут $\angle(i-k-m)$ – в кут із вершиною в пункті k і сторонами $i-k$ та $k-m$, $(i-k-m)$ – поправка на цей кут, α_{i-k} – дирекційний кут сторони $i-k$, отриманий із рішення обернених задач. При переході в системі рівнянь (2) від поправок в кути до поправок в сторони коефіцієнти при поправках в сторони між вихідними пунктами дорівнювали 0, тобто поправки в сторони 1-4, 2-4, 4-6 і 4-7 в рівняннях були відсутніми.

Чотири умовні рівняння дирекційних кутів (2) приєднувались до двох перших рівнянь з попередньої системи умовних рівнянь, складалася матриця коефіцієнтів умовних рівнянь, від неї здійснено перехід до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь. Після розв'язання нормальних рівнянь знайдені поправки у виміряні сторони.

Крім цього, було виконано ще одне врівноваження, при якому умовні рівняння координат замінялись рівняннями суми кутів між сторонами з вихідними дирекційними кутами:

$$\begin{aligned}(2-3-10) + (10-3-4) - (2-3-4) + w_3 &= 0, \\ (1-9-10) + (10-9-4) - (1-9-4) + w_4 &= 0, \\ (4-8-5) + (5-8-7) - (4-8-7) + w_5 &= 0, \\ (4-5-8) + (8-5-7) + (7-5-6) - (4-5-6) + w_6 &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Вільні члени цих рівнянь обчислюють відповідно за формулами

$$\begin{aligned}w_3 &= \angle(2-3-10) + \angle(10-3-4) - \angle(2-3-4), \\ w_4 &= \angle(1-9-10) + \angle(10-9-4) - \angle(1-9-4), \\ w_5 &= \angle(4-8-5) + \angle(5-8-7) - \angle(4-8-7), \\ w_6 &= \angle(4-5-8) + \angle(8-5-7) + \angle(7-5-6) - \angle(4-5-6).\end{aligned}\tag{5}$$

Ці умовні рівняння також додавались до двох перших рівнянь з першого врівноваження. З двох останніх врівноважень отримані практично однакові поправки. Оскільки рівняння сум кутів складати простіше від рівнянь дирекційних кутів, то далі координатні умовні рівняння будуть замінятися рівняннями сум кутів.

Отримані із другого варіанта врівноваження значення поправок записані в стовпці “Поправки другого варіанта” табл. 2.

В табл. 3 зведені значення координат пунктів, які визначалися в мережі, обчислені за врівноваженими сторонами, отриманими з одного і другого варіанта врівноваження.

Схема другої мережі показана на рис. 2. Вона складається із центральної системи і геодезичного чотирикутника. В мережі є 4 вихідні пункти і 11 вимірних сторін. Виміряні сторони, як і в попередньому рисунку, показані суцільними лініями. Штрихові лінії нарисовані сторони, отримані з рішення обернених задач.

Таблиця 2

**Виміряні сторони та поправки, отримані з двох варіантів
врівноваження першої мережі**

Назва сторони	Виміряна сторона, м	Поправка першого варіанта, мм	Поправка другого варіанта, мм	Назва сторони	Виміряна сторона, м	Поправка першого варіанта, мм	Поправка другого варіанта, мм
1-10	1479,46	1,4	0,8	8-9	1696,80	-1,2	-2,1
2-10	1669,69	0,2	0,1	4-8	2702,11	1,9	2,2
3-10	1664,29	3,3	3,9	4-5	1583,58	0,9	-0,1
2-3	1724,59	2,2	1,4	5-8	3623,30	0,9	-1,8
4-10	2212,25	0,9	0,7	7-8	2609,27	-0,7	-1,5
3-2	1620,67	-1,9	-0,5	5-7	2639,33	0,9	2,2
9-10	1661,26	1,1	0,4	5-6	1593,39	0,0	-1,5
4-9	3183,43	1,9	0,7	1-9	1708,00	-0,5	-2,0

Таблиця 3

Координати визначуваних пунктів першої мережі

№№	Перший варіант врівноваження		Другий варіант врівноваження	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м
3	1059,992	3341,023	1059,992	3341,023
4	1567,418	6279,280	1567,418	6279,280
5	1567,424	6279,282	1567,424	6279,282
8	4548,641	4220,003	4548,641	4220,003
9	4219,997	2555,335	4219,997	2555,335
10	2559,994	2620,005	2559,994	2620,005

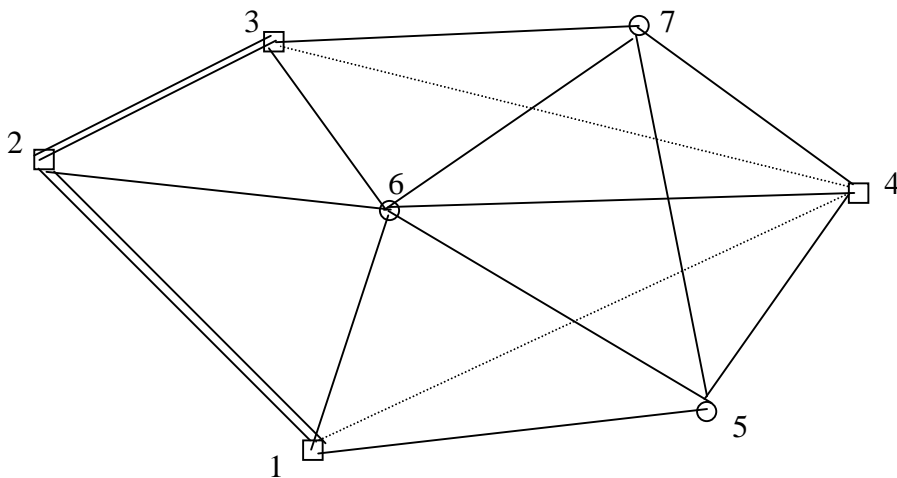


Рис. 2. Схема другої мережі

Координати (умовні) вихідних пунктів зведені в табл. 4, а довжини вимірних сторін – в табл. 5. В цій мережі виникає 5 умовних рівнянь: одне рівняння центральної системи, одне – геодезичного чотирикутника, одне – суми кутів та два – координат. Ця мережа також врівноважена двічі. При врівноваженні другий раз замість двох рівнянь координат складені рівняння суми кутів, як найбільш прості. Одне рівняння суми кутів при пункті 7, а друге – при пункті 5.

Таблиця 4

Координати вихідних пунктів другої мережі

№№	X, м	Y, м	№№ п	X, м	Y, м
1	60023,54	20027,10	3	76418,06	19131,14
2	65988,98	12999,27	4	70012,17	34086,10

Поправки в сторони, отримані з двох варіантів врівноваження, зведені в табл. 5.

Координати пунктів мережі, які визначаються, отримані з двох варіантів врівноваження приведені в табл. 6.

Таблиця 5

Виміряні сторони та поправки, отримані з двох варіантів врівноваження другої мережі

Назва сторони	Виміряна сторона, м	Поправка першого варіанта, мм	Поправка другого варіанта, мм	Назва сторони	Виміряна сторона, м	Поправка першого варіанта, мм	Поправка другого варіанта, мм
3-7	8880,17	-0,4	1,7	3-6	9329,86	0,9	2,4
7-4	7946,64	0	-1,4	7-6	8564,01	0,6	-1,1
4-5	10342,09	4,0	0,1	4-6	11241,23	1,2	-1,5
5-1	8971,61	4,1	0,4	5-6	9084,45	-3,2	-0,5
1-6	8473,81	4,8	2,3	5-7	13994,44	-0,6	3,3
2-6	10226,12	-2,7	-4,3				

Таблиця 6

Координати визначуваних пунктів другої мережі

№№	Перший варіант		Другий варіант	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м
5	61040,817	28940,853	6140,816	28940,850
6	67944,937	23036,586	67944,935	23036,585
7	74996,258	27896,748	74996,256	27896,749

Порівнюючи між собою поправки в сторони, отримані з двох варіантів врівноваження мереж, бачимо, що в них спостерігається деяке розходження, але при цьому характер розподілу поправок залишається незмінним. Повної збіжності отриманих поправок в обох варіантах врівноваження не можна було очікувати, бо із врівноваження ми отримуємо поп-

равки, які задовольняють умовні рівняння і при цьому сума квадратів поправок є мінімальною. При зміні виду умовних рівнянь отримані з врівноваження поправки дещо змінюються.

Свідченням того, що обидва варіанти врівноваження дають однакові результати є повна збіжність в межах точності обчислень координат пунктів, які визначаються в мережах.

Отже, проведений експеримент доводить, що врівноваження мереж трилатерації з надлишковим числом вихідних пунктів можна спростити, замінюючи умовні рівняння координат умовними рівняннями сум кутів або дирекційних кутів. Це практично дає можливість уніфікувати врівноваження мереж трилатерації корелатним способом, бо всі умовні рівняння, які виникають в мережах трилатерації, можна скласти у вигляді умовних рівнянь сум кутів.

1. Методы и приборы высокоточных геодезических измерений в строительстве. // – Под ред В.Б. Большакова. – М.: Недра, 1976. – 336 с. С 2. Яковлев Н.В. Высшая геодезия. – М.: Недра, 1989. – 218 с. 3. Зайцев А.К. Трилатерация. М.: Недра, 1989. – 448 с.