

О.І. Мороз, А.Л. Островський, О.І. Терещук
Національний університет “Львівська політехніка”

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МАКСИМАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЗОБРАЖЕНЬ ВІЗИРНИХ ЦІЛЕЙ ВІД ВІДДАЛІ

© Мороз О.І., Островський А.Л., Терещук О.І., 2001

Явления непрямолинейности (рефракция), неравномерности (фазовые задержки) распространения электромагнитных волн (ЭМВ), а также турбулентность (движения с ускорениями элементарных частиц воздуха) вызваны одной и той же причиной – пространственной неоднородностью плотности (показателя преломления) атмосферы. Между тем, принято считать, что угловая рефракция – δ преимущественно систематическое явление, пропорциональное длине пути ЭМВ $\sigma = f(L)$, а колебания изображений визирных целей – σ , вызванные турбулентностью, считают, обычно, только случайными, хаотическими, пропорциональными квадратному корню с длины – $\sigma = f(\sqrt{L})$.

Экспериментально доказано, что *максимальные* размахи колебаний изображений σ_{max} пропорциональны L . Это объясняется *законом плавучести* элементарных частиц атмосферы.

Phenomenon of non-straightness (refraction), non-uniformity (phase delays) of electromagnetic wave propagation (EWP) and turbulence (chaotic movements with the acceleration of objects of different size) are caused by the same reason – spatial heterogeneity of atmospheric density.

Thus it is considered that angular refraction δ is mainly systematic phenomenon and is proportional to the length of EWP $\sigma = f(l)$ and fluctuation of sighting target images σ that are caused by the turbulence are usually considered chaotic process and proportional to route length $\sigma = f(\sqrt{L})$. Experimentally proved, that maximum fluctuations of sighting target images σ_{max} is proportional to L . It is explained on the basis of the law of buoyancy of elementary air particles in the atmosphere.

Такі явища в атмосфері, як непрямолінійність (рефракція), нерівномірність (фазові затримки) розповсюдження електромагнітних хвиль (ЕМХ) та турбулентність (рухи з прискореннями елементарних частинок повітря) викликані однією і тією ж самою причиною – просторовою неоднорідністю густини атмосфери ρ , та, залежного від густини, показника заломлення повітря – n . Тому ці явища взаємопов'язані і нерозривні. Між тим, явища рефракції та фазових затримок вважають такими, що мають переважно систематичний характер, а турбулентність, навпаки, вважають тільки випадковим, хаотичним процесом. З іншого боку, зрозуміло, що турбулентні рухи, тобто рухи з прискореннями рівновеликих об'ємів та елементарних частинок повітря, приводять до просторових короточасних змін ρ та n . В результаті спостерігаються флуктуації (коливання зображень віддалених предметів, що спостерігаються зоровими трубами оптичних

приладів); до того ж, розмахи коливань зображень є об'єктивною мірою турбулентності та аномальної рефракції. Наші дослідження [1] показали, що турбулентність слід розглядати, як об'єктивне явище природи, що протистоїть, бореться з неоднорідністю густини атмосфери і під дією притягуючої сили ваги землі та виштовхувальних сил Архімеда намагається встановити в приземній атмосфері нормальну стратифікацію. Тому турбулентність не можна розглядати як тільки випадковий процес.

Звернемося до формул вертикальної рефракції в сухій атмосфері:

$$\delta_n'' = 0,198 \frac{P}{T^2} L \quad (1)$$

$$\delta_{ан.сер}'' = 8,132 \frac{P}{T^2} \cdot L \cdot \gamma_{ан.е.сер} \quad (2)$$

$$\gamma_{ан.е.сер} = \frac{2}{L^2} \int_0^L \gamma_{ан} l \cdot dl \quad (3)$$

В формулах (1-3) δ_n – нормальна рефракція; $\delta_{ан.сер}$ – аномальна середня рефракція за короткий проміжок часу (близько 1 с) названа середньою на відміну від миттєвих значень рефракції, оскільки спостерігач при вимірюванням відслідковує середнє положення візирної цілі, що коливається; P – тиск в hPa, T – абсолютна температура в градусах К⁰; L – довжина лінії (шляху ЕМХ); $\gamma_{ан}$ – точкові аномальні градієнти температури на нескінченно малих відрізках dl , l – віддаль від візирної цілі до біжучої точки інтегрування; $\gamma_{ан.е.сер}$ – аномальний, еквівалентний, середній ваговий градієнт.

Як видно з (3), вага градієнта $\gamma_{ан}$ (добуток ldl) тим більша, чим ближче біжуча точка до приймача енергії (до оптичного приладу).

Нормальна рефракція – відома. Для її визначення достатньо виміряти тиск P і температуру – T в одній, краще – у двох, точках на кінцях лінії L .

Невідома аномальна рефракція – $\delta_{ан.сер}$. Вся трудність вирішення проблеми визначення цієї частини рефракції саме в необхідності знати аномальні градієнти $\gamma_{ан}$ в множині точок на трасі L . Між тим, виміряти ці градієнти одночасно в множині точок та ще коли ЕМХ розповсюджуються високо над Землею – складно, надзвичайно дорого, майже неможливо. В метрології прийнято розділяти вертикальні градієнти температури повітря γ на нормальні (адіабатичні) – γ_n та аномальні $\gamma_{ан}$:

$$\gamma = \gamma_n + \gamma_{ан} \quad (4)$$

При $\gamma = \gamma_n$, а $\gamma_{ан} = 0$, спостерігається байдужа рівновага у вертикальній стратифікації приземного повітря. Як відомо, $\gamma_n = -0,0098$ град/м, тобто при нормальній стратифікації температура падає з висотою (на 100 м висоти майже на 1°). Саме при нормальних градієнтах вертикальна рефракція набуває нормального значення і легко визначається за формулою (1). При такій температурній стратифікації термічна турбулентність неможлива. При цьому аномальна рефракція $\delta_{ан.сер} = 0$. Однак, як тільки падіння температури з висотою збільшується ($\gamma \neq \gamma_n$), з'являється аномальна рефракція і починає розвиватися термічна турбулентність. Так що термічна турбулентність і аномальна рефракція існують тільки одночасно, викликані вони однаковими фізичними причинами і в їх основі закладені закономірні процеси.

З формул (1) і (2) видно, що вони описують систематичний процес – рефракцію, яка пропорційна довжині траси L . Коливання зображень візирних цілей є не що інше, як короткоперіодичні дії рефракції. Порівнюючи формули (1) та (2), бачимо, що вони відрізняються тільки одним перемінним параметром – аномальним, еквівалентним середнім вертикальним градієнтом температури. Але нормальна рефракція δ_n , яка визначається за формулою (1), упродовж цілого дня змінює свою величину на $0,1-0,2''$. Тоді як $\delta_{ан.сер}$ змінюється протягом дня на десятки секунд, при цьому змінюються не тільки середні значення, але й миттєві значення аномальної рефракції. З цього порівняння можна зробити висновок, що причиною такої різниці в характері змін δ_n , та $\delta_{ан.сер}$ є вертикальний градієнт температури – $\gamma_{ан.е.сер}$. Дійсно, зі всіх параметрів формул (1) та (2), як показують результати вимірювань, тільки $\gamma_{ан.е.сер}$ флюктує з різними частотами та амплітудами. Зрозуміло, якщо флюктує градієнти температури, то флюктує і температура, і тиск. Однак в реальних умовах відношення $\frac{P}{T^2}$ за деякий невеликий проміжок часу, має майже постійне значення.

Навіть якщо допустити, що тиск змінюється на ± 10 Гпа, а температура на $\pm 10^\circ\text{K}$, то і тоді це відношення залишається постійним з точністю $0,08\%$. Звичайно, такі значні зміни метеопараметрів за короткі проміжки часу не реальні.

На основі всього вищесказаного можна стверджувати, що коливання зображень можна описувати формулою, аналогічною (2). Покажемо це. Двом миттєвим градієнтам температури, тобто максимальному $\gamma_{ан.е.мах}$ та мінімальному $\gamma_{ан.е.мін}$ будуть відповідати видимі в зоровій трубці два екстремальні положення візирної цілі, яким, в свою чергу, відповідають два миттєві екстремальні значення часткової аномальної рефракції $\delta_{ан.мах}$ і $\delta_{ан.мін}$. Різниця екстремальних значень аномальної рефракції дасть максимальний розмах коливань зображень візирної цілі – $\sigma_{мах}$ (подвійну амплітуду флюктуацій) в кутовій мірі:

$$\sigma_{мах} = \delta_{ан.мах} - \delta_{ан.мін}. \quad (4)$$

На основі (2) і (4) можемо записати:

$$\sigma''_{мах} = 8,132 \frac{P}{T^2} L (\gamma_{ан.е.мах} - \gamma_{ан.е.мін}). \quad (5)$$

Теоретично і експериментально доведено, що максимальні (граничні) турбулентні переміщення елементарних частинок повітря є не випадковими, а закономірними. Максимальні флюктуації вертикальних аномальних градієнтів температури в термічно турбулентній атмосфері найбільш точно і просто описуються законом *плинності* елементарних частинок повітря. Під дією притягуючої сили ваги Землі та виштовхувальних сил Архімеда елементарні частинки повітря турбулентно рухаються до того моменту, коли $\gamma = \gamma_n$, а $\gamma_{ан} = 0$. Таким миттєвим станом є одна границя максимальних турбулентних рухів: $\gamma_{ан.е.мін} = 0$. Оскільки флюктуації є симетричні щодо деякого середнього значення $\gamma_{ан.е.сер}$, то другою границею флюктуацій є $\gamma_{ан.е.мах}$. Тобто

$$\gamma_{ан.е.сер} = \frac{\gamma_{ан.е.мін} + \gamma_{ан.е.мах}}{2} = \frac{\gamma_{ан.е.мах}}{2}. \quad (6)$$

Враховуючи (6), формулу (2) запишемо так:

$$\delta''_{ан.сер} = 8,132 \frac{P}{T^2} L \frac{\gamma_{ан.е.мах}}{2}. \quad (7)$$

Враховуючи, що $\gamma_{ан.е. min} = 0$, формула (5) набере вигляд:

$$\sigma''_{max} = 8,132 \frac{P}{T^2} L \cdot \gamma_{ан.е. max} \cdot \quad (8)$$

Введемо поняття максимальної амплітуди коливань за деякий короткий час, (близько 1 с) – $\sigma_{A_{max}}$. Максимальна амплітуда – половина максимального розмаху, тобто:

$$\sigma''_{A_{max}} = \frac{\sigma''_{max}}{2}. \quad (9)$$

Підставимо значення $\sigma''_{A_{max}}$ з формули (8) в формулу (9), отримаємо:

$$\sigma''_{A_{max}} = 8,132 \frac{P}{T^2} L \frac{\gamma_{ан.е. max}}{2}. \quad (10)$$

Порівнюючи (7) та (10), зауважимо, що їх праві частини рівні. Тоді рівні й ліві частини, тому:

$$\delta''_{ан.сер} = \sigma''_{A_{max}}. \quad (11)$$

Формулою (11) доведена теорема: в термічно турбулентній атмосфері максимальна кутова амплітуда коливань зображень візирних цілей за короткий проміжок часу (одна – декілька секунд) дорівнює середній аномальній рефракції за цей же проміжок.

Зрозуміло, що теорема вирішує проблему визначення аномальної рефракції без необхідності вимірювання градієнтів температури в багатьох точках на шляху ЕМХ. Для визначення середньої аномальної рефракції за 1 – 3 секунди достатньо виміряти амплітуду або розмах максимальних коливань зображень візирної цілі за цей же короткий відрізок часу.

Проте до цього часу не спростоване уявлення про те, що турбулентність є тільки випадковий процес. В основу такого уявлення покладена приблизна формула В.І. Татарського [3]:

$$\sigma = 1,7 Cn D^{-1/6} L^{1/2}. \quad (12)$$

Формула описує залежність між середньою квадратичною величиною амплітуд флуктуацій центра плями штучного світла – σ та довжиною шляху світла – L . Як бачимо, формула (12) описує випадковий процес, оскільки в ній σ пропорційно \sqrt{L} . В цій формулі Cn – коефіцієнт, що характеризує інтенсивність пульсацій показника заломлення повітря – n , D – діаметр об'єктива зорової труби.

Ми не спростовуємо формули (12). Суть наших тверджень в іншому. Формула (12) описує весь спектр амплітуд коливань зображень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}{2}} \quad (13)$$

В наших доказах мова йде не про *середні квадратичні амплітуди коливань* σ , а про *максимальні розмахи коливань* σ_{max} . Саме такі коливання – закономірні, тому що описуються законом плинності елементарних частинок повітря в атмосфері і пропорційні не \sqrt{L} , а пропорційні L (див. (5), (10)).

Надаючи велике значення цьому питанню, тобто, по суті, питанню справедливості теореми, яка вирішує проблему визначення рефракції в турбулентній атмосфері, ми ще раз експериментально встановити залежність σ_{max} від віддалі. Встановити залежність $\sigma_{max} = f(L)$

виявилось можливим на основі великих експериментальних польових досліджень точності геометричного нівелювання, виконаних доцентом О.І. Терещуком під час роботи над кандидатською дисертацією [4,5].

Експериментальні дослідження були проведені на двох ділянках шосейних доріг, на узбіччях; тому умови експериментів були близькими до проведення нівелювання вздовж доріг з асфальтним покриттям. Були вибрані похилі ділянки доріг, при цьому одна ділянка збіглася з напрямком меридіану, а інша – з напрямком паралелі.

Програма досліджень повинна була відповісти, перш за все, на таке питання: як змінюється точність відрахування штрихів нівелірних рейок залежно від розмаху коливань зображень?

Завчасно, до початку спостережень, на ділянках по обидва боки від нівеліра було закладено реperi: на першій ділянці – через 30, 40, 50 і 60 м, на другій – через 40, 50, 60, 75 м. Ніжки штатива розташовувались на бетонних стовпчиках, які були закладені в ґрунт одночасно з реперами (рис. 1 та 2).

Спостереження на ділянках, по суті, імітували багатократне нівелювання на одній станції за програмою геометричного нівелювання II класу. Спостереження виконувались в такій послідовності (прямий хід, $L = 30$ м):

1. Вимірювання метеопараметрів (температури на 3-х висотах, тиску, швидкості вітру, хмарності).

2. Відліки з точністю 0,1 найменшої поділки барабана мікрометра нівеліра Н-05 при двох суміщеннях штриха основної шкали задньої рейки з серединою клиноподібного бісектора; вимірювання розмаху коливань зображень штриха: фіксувалось 6 – 8 пар екстремальних положень штриха рейки (нижніх та верхніх) відносно ниток бісектора.

3. Те саме, тільки по основній шкалі передньої рейки.

4. Відлік по додатковій шкалі передньої рейки (два суміщення штриха з серединою бісектора).

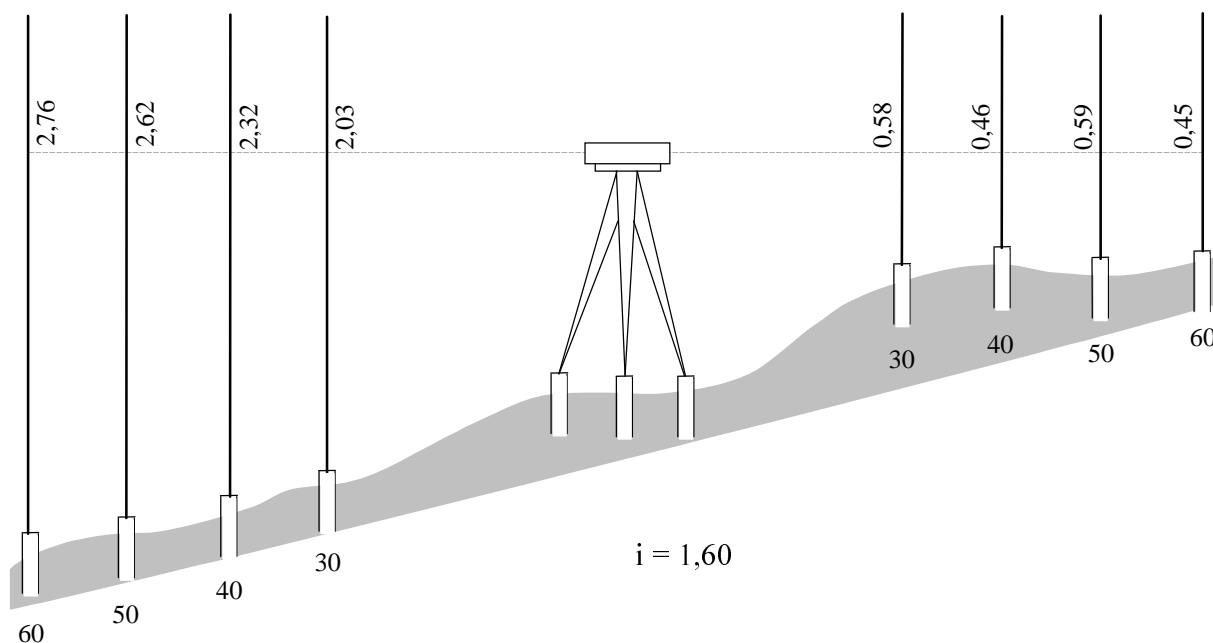


Рис. 1. Схема розташування спостережувальної станції на ділянці № 1

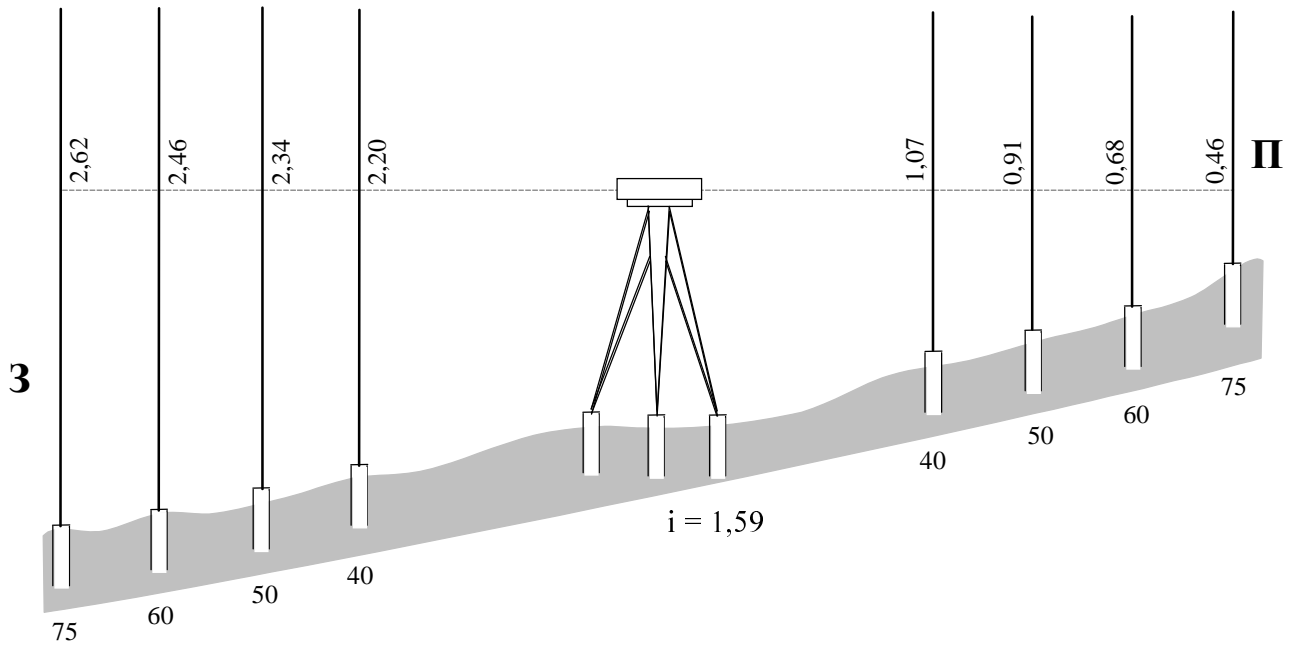


Рис. 2. Схема розташування спостережувальної станції на ділянці № 2

5. Те саме, тільки по задній рейці.

6. Вимірювання метеопараметрів.

7. Рейки послідовно встановлювались на віддальх від нівеліра 40, 50, 60 метрів і виконувались дії, описані в п. 1 – 6.

8. Зворотний хід починався через 10 – 15 хвилин.

Один прийом складався з прямого та зворотного ходу та займав 20 – 25 хвилин часу. Всього було виконано 68 прийомів.

На другій ділянці виконана майже така ж програма. Виміри максимальних розмахів коливань зображень велись в умовних балах. Для кожного значення довжини плеч L_i було отримано 6 – 8 значень σ_{max_i} в півприйомі, 12 – 16 значень в прийомі. Прийємо середню кількість вимірів в прийомі $n = 14$. Тоді кількість вимірів σ_{max_i} при деякій довжині плеч L_i тільки по одній рейці становила 952.

Ми при обробці використали ці середні значення σ_{max_i} , які, завдяки такій значній кількості вимірів, отримані з високим ступенем точності. Ці середні значення σ_{max_i} наведені в табл. 1.

Середні квадратичні помилки таких значень σ_{max_i} знаходяться в границях 3 – 12 мікрон. Отже, середні значення σ_{max_i} можна вважати безпомилковими з точністю до 0,01 мм. Однак σ_{max_i} в табл. 1 подано в лінійній мірі, а значення максимальних коливань зображень у формулах (8), (10), виражені у кутовій мірі (в секундах дуги). Лінійні і кутові флуктуації знаходяться в співвідношеннях:

$$\frac{\sigma_{max}}{L} = \frac{\sigma_{max}''}{\rho''}; \quad \sigma_{max} = \frac{\sigma_{max}''}{\rho''} L. \quad (14)$$

Формула (14), враховуючи (8), набере вигляд:

$$\sigma_{\max(MM)} = 0,039425 \frac{P}{T^2} \gamma_{ан.е. max} \cdot L^2. \quad (15)$$

Формула (12), якщо σ виразити в міліметрах, а L в кілометрах, набере вигляд:

$$\sigma_{(MM)} = 1700 \cdot CnD^{-1/2} L^{3/2}. \quad (16)$$

Отже, згідно з формулою (15) $\sigma_{\max(MM)} = f(L^2)$, а згідно з (16) – $\sigma'_{\max(MM)} = f(L^{3/2})$.

При подальшій обробці обчислювались значення $\sigma_{\max(L_i)_e}$ та $\sigma'_{\max(L_i)_e}$ за формулами:

$$\sigma_{\max(L_i)_e} = \sigma_{\max(L_o)} \frac{L_i^2}{L_o^2}, \quad (17)$$

$$\sigma'_{\max(L_i)_e} = \sigma'_{\max(L_o)} \frac{L_i^{3/2}}{L_o^{3/2}}. \quad (18)$$

Таблиця 1

Середні (зі всіх спостережень на ділянках) значення максимальних розмахів коливань зображень σ_{\max_i} при різних довжинах L_i та СКП їх визначення

L_i (м)	Задня рейка			Передня рейка		
	σ_{\max_i} , (бали)	σ_{\max} , (мм)	с.к.п. $m_{\sigma_{\max}}$, (мм)	σ_{\max_i} , (бали)	σ_{\max} , (мм)	с.к.п. $m_{\sigma_{\max}}$, (мм)
Експериментальна ділянка № 1						
30	0,61	0,26	0,003	1,01	0,43	0,003
40	1,10	0,48	0,004	2,13	0,93	0,004
50	1,40	0,63	0,007	2,96	1,34	0,007
60	1,90	0,89	0,008	4,34	2,02	0,008
Експериментальна ділянка № 2						
40	1,20	0,53	0,004	1,66	0,73	0,004
50	1,80	0,81	0,007	2,79	1,26	0,007
60	2,40	1,12	0,008	4,28	2,00	0,008
75	3,30	1,81	0,012	6,13	2,86	0,012

Наприклад, використовуючи відомі значення σ_{\max} при $L_o = 30$ м, обчислювались значення $\sigma_{\max(L_i)_e}$ при $L_i = 40, 50, 60$ м за формулою (17). Потім, використовуючи $\sigma_{\max(L_o)}$ при $L_o = 40$ м, обчислювались за цією ж формулою (17) значення $\sigma_{\max(L_i)_e}$ при $L_i = 30, 50, 60$ м і так далі. Аналогічно визначались значення $\sigma'_{\max(L_i)_e}$ за формулою (18). Після цього визначались абсолютні помилки знайдених таким чином $\sigma_{\max(L_i)_e}$ та $\sigma'_{\max(L_i)_e}$ за формулами:

$$\Delta_i = \sigma_{\max(L_i)} - \sigma_{\max(L_i)_e}, \quad (19)$$

$$\Delta'_i = \sigma'_{\max(L_i)} - \sigma'_{\max(L_i)_e}. \quad (20)$$

Результати обчислень зведені в табл. 2 та табл. 3, окремо для кожного з двох експериментальних ділянок.

Вага P' залежності $\sigma_{max} = f(L^{3/2})$ в середньому в 5 разів менша від ваги – P залежності $\sigma_{max} = f(L^2)$.

Однак проведений аналіз не враховував, що експерименти виконувались на похилих ділянках шосейної дороги, коли коливання σ змінювались не тільки з віддалю, але й з висотою променя над поверхнею Землі. Дійсно, коливання штрихів на задніх рейках (промінь високо над землею) майже вдвічі менші, ніж коливання штрихів на передніх рейках при однакових довжинах плеч. Тобто в даних експериментах $\sigma = f(L, h)$. Тому для виявлення залежності σ_{max} тільки від довжини необхідно виключити з результатів вимірів вплив різниці висот променів.

Таблиця 2

**Обчислені значення $\sigma_{max(L_i)_e}$ та $\sigma'_{max(L_i)_e}$
і їх істинні помилки Δ_i та Δ'_i на ділянці № 1**

L_o , мм	L_i , мм	Рейки З П	Обчислені значення		Істинні значення $\sigma_{max(L_i)}$, мм	Δ_i , мм	Δ'_i , мм
			$\sigma_{max(L_i)_e}$, мм	$\sigma'_{max(L_i)_e}$, мм			
30	40	З	0,46	0,40	0,48	-0,02	+0,08
		П	0,76	0,66	0,93	-0,17	+0,27
	50	З	0,72	0,56	0,63	+0,09	+0,07
		П	1,19	0,93	1,34	-0,15	+0,41
	60	З	1,04	0,74	0,89	+0,15	+0,15
		П	1,72	1,22	2,02	-0,30	+0,80
40	30	З	0,27	0,31	0,26	+0,01	-0,05
		П	0,52	0,60	0,43	+0,09	-0,17
	50	З	0,75	0,67	0,63	+0,12	-0,05
		П	1,45	1,30	1,34	+0,11	+0,04
	60	З	1,08	0,88	0,89	+0,19	+0,01
		П	2,09	1,71	2,02	+0,07	+0,31
50	30	З	0,23	0,29	0,26	-0,03	-0,03
		П	0,48	0,62	0,43	+0,05	-0,19
	40	З	0,40	0,45	0,48	-0,08	+0,03
		П	0,86	0,96	0,93	-0,07	-0,03
	60	З	0,91	0,83	0,89	+0,02	+0,06
		П	1,93	1,76	2,02	-0,09	+0,26
60	30	З	0,22	0,31	0,26	-0,04	-0,05
		П	0,50	0,71	0,43	+0,07	-0,28
	40	З	0,40	0,48	0,48	-0,08	0
		П	0,90	1,10	0,93	-0,03	-0,17
	50	З	0,62	0,68	0,63	-0,01	-0,05
		П	1,40	1,54	1,34	+0,06	-0,20

$$m(L^2) = 0,11 \text{ мм}; \quad m(L^{3/2}) = 0,23 \text{ мм}; \quad \frac{P}{P'} = \frac{m(L^{3/2})^2}{m(L^2)} = 4,37.$$

Скористаємося тією особливістю, що ухили ділянок доріг мають упродовж 120 м (ділянка № 1) та 150 м (ділянка № 2) приблизно постійні кути нахилу до горизонту, а підстелюючі поверхні однорідні. Тому, при рівних плечах підняття променя, що йде на задню рейку, приблизно дорівнює пониженню променя, що йде на передню рейку.

Завдяки цьому, наприклад при плечах $L = 30$ м, можемо записати систему з двох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max(30)_n} &= X_{30} + \Delta X(30) \\ \sigma_{\max(30)_z} &= X_{30} - \Delta X(30) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Таблиця 3

Обчислені значення $\sigma_{\max(L_i)_z}$ та $\sigma'_{\max(L_i)_z}$
та їх істинні помилки Δ_i та Δ'_i на ділянці № 2

L_o , мм	L_i , мм	Рейки З П	Обчислені значення		Істинні значення $\sigma_{\max(L_i)}$, мм	Δ_i , мм	Δ'_i , мм
			$\sigma_{\max(L_i)_z}$, мм	$\sigma'_{\max(L_i)_z}$, мм			
40	50	З	0,83	0,74	0,81	+0,02	+0,07
		П	1,14	1,02	1,26	-0,12	+0,24
	60	З	1,19	0,97	1,12	+0,07	+0,15
		П	1,64	1,34	2,00	-0,36	+0,66
	75	З	1,86	1,36	1,81	+0,05	+0,45
		П	2,57	1,88	2,84	-0,27	+0,96
50	50	З	0,52	0,58	0,53	-0,01	-0,05
		П	0,81	0,90	0,73	+0,08	-0,17
	60	З	1,17	1,06	1,12	+0,05	+0,06
		П	1,81	1,66	2,00	-0,19	+0,34
	75	З	1,82	1,49	1,81	+0,01	+0,32
		П	2,84	2,31	2,84	0	+0,53
60	50	З	0,50	0,61	0,53	-0,03	-0,08
		П	0,89	1,09	0,73	+0,16	-0,36
	60	З	0,78	0,85	0,81	-0,03	-0,04
		П	1,39	1,52	1,26	+0,13	-0,26
	75	З	1,75	1,56	1,81	-0,06	+0,25
		П	3,12	2,80	2,84	-0,28	+0,04
750	50	З	0,51	0,70	0,58	-0,02	-0,12
		П	0,81	1,10	0,73	+0,08	-0,37
	60	З	0,80	0,98	0,81	-0,01	-0,17
		П	1,26	1,55	1,26	0	-0,29
	75	З	1,16	1,29	1,12	+0,04	-0,17
		П	1,82	2,03	2,00	-0,18	-0,03

$$m(L^2) = 0,135 \text{ мм}; \quad m(L^{3/2}) = 0,338 \text{ мм}; \quad \frac{P}{P'} = \frac{m(L^{3/2})^2}{m(L^2)^2} = 6,27.$$

В цих рівняннях в лівій частині значення розмаху коливань $\sigma_{\max(30)_n}$ на передню рейку (дорівнює 0,43 мм) і $\sigma_{\max(30)_z}$ на задню рейку (дорівнює 0,26 мм). X_{30} – невідоме значення коливань, що мало б місце при рівних висотах променя на задню та передню рейки; $\Delta X_{(30)}$ – зміна σ_{\max} під впливом зміни висот. Розв'язавши ці рівняння, знайдемо $\Delta X = \pm 0,085$ мм та $X_{30} = 0,345$ мм.

Для кожної ділянки можна скласти по 4 системи таких рівнянь і знайти розмахи коливань, залежні тільки від віддалі, які б спостерігалися при рівних висотах променя на задню та передню рейки.

Знайдені таким чином розмахи коливань належать до променів, що мають висоти над земною поверхнею рівні висотам нівелірів на ділянках ($i_1 = 1,60$ м, $i_{II} = 1,59$ м).

Нижче, в табл. 4, подані значення максимальних, наведених до однієї висоти, розмахів $\sigma_{\max.np}$, залежних тільки від L .

Таблиця 4

**Приведені до однієї висоти середні
зі всіх спостережень максимальні значення – $\sigma_{\max.np}$**

Пара- метр	Ділянка № 1				Ділянка № 2			
	довжини плеч, м				довжини плеч, м			
	30	40	50	60	40	50	60	75
$\sigma_{\max.np}$, мм	0,345	0,705	0,985	1,455	0,630	1,040	1,56	2,325

В подальшому, використовуючи ці значення $\sigma_{\max.np}$, за формулами (17) та (18) обчислювались $\sigma_{\max.np.g}$ та $\sigma'_{\max.np.g}$. Результати обчислень зведені в табл. 5 та 6.

Таблиця 5

Обчислені значення $\sigma_{\max.np.g}$ та $\sigma'_{\max.np.g}$ і їх помилки Δ_i та Δ'_i . (ділянка № 1)

L_o , м	L_i , м	Обчислені, приведені значення, мм		Істинні приведені значення $\sigma_{\max.np}$, мм	Помилки	
		$\sigma_{\max.np.g}$	$\sigma'_{\max.np.g}$		Δ_i	Δ'_i
1	2	3	4	5	6	7
30	40	0,61	0,53	0,70	-0,09	-0,17
	50	0,96	0,74	0,98	-0,02	-0,24
	60	1,38	0,98	1,46	-0,08	-0,48
40	30	0,40	0,46	0,34	+0,06	+0,12
	50	1,10	0,99	0,98	+0,12	+0,01
	60	1,59	1,30	1,46	+0,13	-0,16

Продовж. табл. 5

1	2	3	4	5	6	7
50	30	0,36	0,46	0,34	+0,02	+0,12
	40	0,63	0,70	0,70	-0,07	0
	60	1,42	1,29	1,46	-0,04	-0,17
60	30	0,36	0,51	0,34	+0,02	+0,17
	40	0,65	0,79	0,70	-0,05	+0,09
	50	1,01	1,11	0,98	+0,03	+0,13

$$m(L^2)=0,071; \quad m(L^{3/2}) = 0,194; \quad \frac{P}{P'} = 7,5 \text{ раз.}$$

$$\text{Систематичні помилки: } m_c(L^2) = 0,0025 \text{ мм; } m_c(L^{3/2}) = 0,0483 \text{ мм; } \frac{m_c^2(L^{3/2})}{m_c^2(L^2)} = 19,3 \text{ раз.}$$

Таблиця 6

**Обчислені значення $\sigma_{\max.нр.в}$ та $\sigma'_{\max.нр.в}$
і їх помилки Δ_i та Δ'_i . (ділянка № 2)**

$L_o, \text{ м}$	$L_i, \text{ м}$	Обчислені, приведені значення, мм		Істинні приведені значення $\sigma_{\max.нр.в}, \text{ мм}$	Помилки	
		$\sigma_{\max.нр.в}$	$\sigma'_{\max.нр.в}$		Δ_i	Δ'_i
40	50	0,98	0,88	1,04	-0,06	-0,16
	60	1,42	1,14	1,56	-0,14	-0,42
	75	2,21	1,62	2,32	-0,11	-0,70
50	50	0,66	0,74	0,63	+0,03	+0,11
	60	1,50	1,37	1,56	-0,06	-0,19
	75	2,34	1,91	2,32	+0,02	-0,41
60	50	0,69	0,85	0,63	+0,06	+0,22
	60	1,08	1,19	1,04	+0,04	+0,15
	75	2,44	2,18	2,32	+0,12	-0,14
75	50	0,66	0,90	0,63	+0,03	+0,27
	60	1,03	1,27	1,04	-0,01	+0,23
	75	1,49	1,66	1,56	-0,07	+0,10

$$m(L^2)=0,074; \quad m(L^{3/2}) = 0,307; \quad \frac{P}{P'} = 17,2 \text{ раз.}$$

$$\text{Систематичні помилки: } m_c(L^2) = 0,0125 \text{ мм; } m_c(L^{3/2}) = 0,0783 \text{ мм; } \frac{m_c^2(L^{3/2})}{m_c^2(L^2)} = 12,8 \text{ раз.}$$

Тепер, аналізуючи знайдені і наведені в таблицях середні квадратичні помилки P та P' формул (15) та (16), бачимо, що формула, в якій прийняті максимальні розмахи коливань зображень пропорційними L^2 , в середньому на порядок точніше формули, в якій прийнято, що максимальні коливання зображень пропорційні $L^{3/2}$. Цікаво, що навіть ваги середніх систематичних помилок m_c формули, в якій $\sigma = f(L^2)$ в 12,8 разів менші від ваги середніх систематичних помилок формули, в якій $\sigma = f(L^{3/2})$, тобто знову довір'я до першої формули на порядок більше ніж до другої.

Раніше, в [1], також на основі великої кількості експериментальних вимірів, що велися над різними за альbedo підстелюючими поверхнями (асфальт, ґрунтова дорога, луки) на горизонтальних ділянках, коли зміни розмаху флуктуацій можуть бути викликані тільки змінами віддалі L , показано, що формула (15) в 16 разів точніша від формули (16).

Висновки

1. Формули, в яких прийнято, що максимальні розмахи коливань зображень в кутовій мірі пропорційні \sqrt{L} або в лінійній мірі пропорційні $L^{3/2}$, слід відкинути, як помилкові.
2. Якщо ведуться виміри максимальних коливань зображень візирних цілей в кутовій мірі, тоді формула (12) набере вигляд

$$\sigma_{max} = 1,7 Cn D^{-1/6} L. \quad (21)$$

3. Як показано в [2], формула (21) може бути перетворена у формулу для визначення аномальної рефракції.

1. Ostrowski A. *Regalities of fluctuations and determination of vertical gradients of temperature and anomalous refraction of the light beam in thermally turbulent atmosphere* // *Reports of geodesy*. – 1997 №2(25). – P. 21 – 29. 2. Мороз О., Островський А. *Про єдність теорії рефракції та турбулентності* // *У Міжнародний науково-технічний симпозиум. Алушта (Крим)*. – 2000. – С. 29 – 33. 3. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере*. – М.: Наука, 1967. – 548 с. 4. Терещук О.І. *До питання точності відрахування штрихів нівелірних рейок в турбулентній атмосфері. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва* // *Ювілейний збірник “Геологія, геодезія та картографія”*. – 2000. – С. 161 – 163. 5. Терещук О.І. *Точність фіксації амплітуди коливань зображень штрихів* // *Міжнародний науково-технічний симпозиум. Алушта (Крим)*. – 2000. – С. 20 – 23.