

О ТОЧНОСТИ СТЕРЕОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ НА КАРЬЕРАХ

Точность определения элементов ориентирования снимков во многом обусловлена расположением опорных точек. Наиболее высокая точность достигается, когда опорные точки располагают симметрично осям снимка, как показано на рис. 1.

Однако при съемке карьера, выполняемой с целью его картирования, вычисления объема вынудой горной породы или для решения других задач, опорные точки, как правило, изображаются примерно на одной линии в верхней части фототеодолитного снимка, параллельно оси абсцисс. Это объясняется тем, что и опорные, и базисные точки располагают преимущественно на бортах карьера, в то время как пространство, подлежащее съемке, размещено значительно ниже. Возникает задача оценки точности определения элементов ориентирования фототеодолитных снимков применительно к условиям съемки карьера, для которых свойственно расположение опорных точек со значительным отклонением от стандартного положения.

Поставленная задача сводится к определению зависимостей средних квадратических ошибок угловых элементов внешнего ориентирования и фокусного расстояния от точности измерений координат точек фототеодолитных снимков. Для этого, запишем линеаризованные уравнения известного условия коллинеарности в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial f} df + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial x} dx + l_x &= v_x, \\ \frac{\partial z}{\partial f} df + \frac{\partial z}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial x} dx + l_z &= v_z, \end{aligned} \quad (1)$$

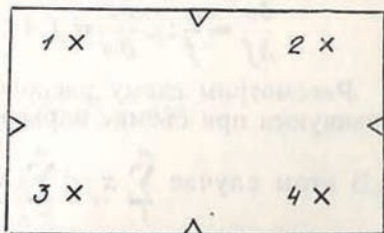


Рис. 1. Схема 1. Стандартное расположение опорных точек на снимке.

где x, z — координаты опорных точек на фототеодолитном снимке; df — определяемая поправка в фокусное расстояние камеры; $da, d\omega, dx$ — определяемые поправки в соответствующие угловые элементы внешнего ориентирования.

Каждая опорная точка дает два уравнения при четырех неизвестных, т. е. система решается под условием $[vv] = \min$, если количество опорных точек не менее трех на снимок.

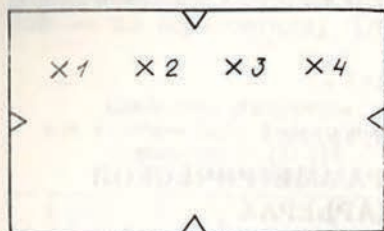


Рис. 2. Схема 2. Асимметричное расположение опорных точек на снимке.

Произведем оценку точности определяемых величин с использованием корреляционной матрицы $K = \mu^2 A^{-1}$, где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; A^{-1} — обратная матрица нормальных уравнений, полученных на основании (1). С целью упрощения решения поставленной задачи примем угловые элементы внешнего ориентирования близкими нулю. Тогда коэффициенты при неизвестных в уравнениях (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial f} = \frac{x}{f}; \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{xz}{f}; \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = f + \frac{x^2}{f}; \quad \frac{\partial x}{\partial \kappa} = z, \\ \frac{\partial z}{\partial f} = \frac{z}{f}; \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = f + \frac{z^2}{f}; \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{xz}{f}; \quad \frac{\partial z}{\partial \kappa} = -x. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим схему расположения точек, наиболее часто встречающуюся при съемке карьеров (рис. 2).

$$\text{В этом случае } \sum_1^n x = \sum_1^n x^3 = 0, \quad \sum_1^n x^2 = [x^2], \quad \sum_1^n x^4 = [x^4],$$

$$\sum_1^n z = nz, \quad \sum_1^n z^2 = nz^2, \quad \sum_1^n x^2 z^2 = [x^2] z^2.$$

Тогда матрицу нормальных уравнений можно представить в виде

$$A_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь составляющие матрицы

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{[x^2] + nz^2}{f^2} & \frac{[x^2] + n(f^2 + z^2)}{f^2} z \\ \frac{[x^2] + n(f^2 + z^2)}{f^2} z & \frac{z^2 [x^2] + n(f^2 + z^2)^2}{f^2} \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{nf^4 + [x^4] + (2f^2 + z^2)[x^2]}{f^2} & n fz \\ n fz & [x^2] + nz^2 \end{bmatrix}.$$

Далее по известным правилам обращения получим обратные матрицы

$$R_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z^2 [x^2] + n (f^2 + z^2)^2}{nf^2 [x^2]} & -\frac{z [x^2] + n (f^2 + z^2)}{f} \\ -\frac{z [x^2] + n (f^2 + z^2)}{f} & \frac{[x^2] + nz^2}{nf^2 [x^2]} \end{bmatrix},$$

$$R_1^{-1} = \delta_1 \begin{bmatrix} \frac{[x^2] + nz^2}{nf^2 [x^2]} & \frac{z}{f [x^2]} \\ \frac{z}{f [x^2]} & \frac{nf^4 + [x^4] + (2f^2 + z^2) [x^2]}{nf^4 [x^2]} \end{bmatrix},$$

где

$$\delta_1 = 1 - \frac{[x^4] + nz^2}{nf^4 [x^2]} ([x^4] + (2f^2 + z^2) [x^2]).$$

Учитывая, что корреляционная матрица определяемых величин отличается от матрицы A_2 лишь числовым множителем μ^2 , найдем средние квадратические ошибки определения угловых элементов внешнего ориентирования и фокусного расстояния, полученных в результате уравнивания

$$m_f = \frac{\mu}{f \sqrt{n [x^2]}} \sqrt{z^2 [x^2] + n (f^2 + z^2)^2},$$

$$m_\alpha = m_\omega = \frac{\mu}{f \sqrt{n [x^2]}} \sqrt{[x^2] + nz^2},$$

$$m_x = \mu \frac{f^2 \sqrt{n} + [x^2]}{f^2 \sqrt{n [x^2]}} \delta_2. \quad (3)$$

Здесь

$$\delta_2 = \sqrt{1 - \frac{[x^2] + 2f(n-1)}{(f^2 \sqrt{n} + [x^2])^2} [x^2] + \frac{[x^4]}{(f^2 \sqrt{n} + [x^2])^2} + \frac{z^2 [x^2]}{(f^2 \sqrt{n} + [x^2])^2}}.$$

Коэффициент δ_2 отклоняется от единицы примерно на 0,5%, следовательно, им можно пренебречь, не вызывая значительного искажения m_x .

Используя члены обратной матрицы A_2^{-1} , можно вычислить по известным формулам коэффициенты корреляции между определяемыми зависимыми элементами

$$k_{f\omega} = \frac{z [x^2] + n z (f^2 + z^2)}{\sqrt{(z^2 [x^2] + n (f^2 + z^2)^2) ([x^2] + nz^2)}},$$

$$k_{\alpha x} = \frac{z f^2 \sqrt{n}}{\sqrt{([x^2] + nz^2) (nf^4 + [x^4] + (2f^2 + z^2) [x^2])}}, \quad (4)$$

Рассмотрим второй случай возможного расположения опорных точек на фототеодолитных снимках. Пусть эти точки лежат симметрично оси аппликат, причем значения z для каждой из них — близки к нулю (рис. 3).

Тогда корреляционная матрица полученных при этих условиях уравнений (1) примет вид

$$K_3 = \mu \begin{bmatrix} \frac{f^2}{[x^2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{nf^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^2}{nf^4 + 2f^2[x^2] + [x^4]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{[x^2]} \end{bmatrix}.$$

Отсюда легко получить средние квадратические ошибки определения неизвестных

$$m_f = \frac{f\mu}{\sqrt{[x^2]}}, \quad m_a = \frac{\mu}{f\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{2[x^2]}{nf^2} - \frac{[x^4]}{nf^4}},$$

$$m_\omega = \frac{\mu}{f\sqrt{n}}, \quad m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[x^2]}}. \quad (5)$$

При съемке карьера иногда возникают случаи, когда опорные точки располагаются вертикально, близко к главной оси снимка, например, для наблюдений за деформацией бортов карьера по методике, разработанной во Львовском политехническом институте [2]. Ожидаемую точность применительно к этой методике получим по следующим формулам:

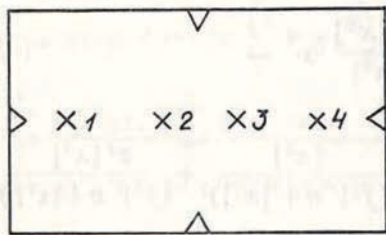


Рис. 3. Схема 3. Симметричное расположение опорных точек на снимке.

$$m_f = \frac{f\mu}{\sqrt{[z^2]}}, \quad m_a = \frac{\mu}{f\sqrt{n}},$$

$$m_\omega = \frac{\mu}{f\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{2[x^2]}{nf} - \frac{[x^4]}{nf^4}},$$

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[z^2]}}. \quad (6)$$

Как видно из корреляционной матрицы, определяемые неизвестные при таком расположении точек линейно независимы.

Наконец рассмотрим случай стандартного расположения опорных точек (см. рис. 1). Учитывая, что для этого случая

$$\sum_1^n x = \sum_1^n z = \sum_1^n x^3 = \sum_1^n z^3 = \sum_1^n xz = \sum_1^n x^2z = \sum_1^n xz^2 = 0.$$

$$\sum_1^n x^2 = [x^2], \quad \sum_1^n z^2 = [z^2], \quad \sum_1^n x^4 = [x^4], \quad \sum_1^n z^4 = [z^4],$$

корреляционную матрицу для системы (1) запишем

$$K_1 = \mu \begin{bmatrix} \frac{f^2}{[x^2] + [z^2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^2}{nf^4 + 2f^2[x^2] + [x^4] + [x^2z^2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^2}{nf^4 + 2f^2[z^2] + [z^4] + [x^2z^2]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{[x^2] + [z^2]} \end{bmatrix}.$$

И в этом случае угловые элементы внешнего ориентирования линейно независимы. Средние квадратические ошибки, полученные в результате уравнивания, можно вычислить по формулам:

$$m_f = \frac{\mu f}{\sqrt{[x^2] + [z^2]}}, \quad m_\alpha = \frac{\mu f}{\sqrt{nf^4 + 2f^2[x^2] + [x^4] + [x^2z^2]}}, \quad (7)$$

$$m_\omega = \frac{\mu f}{\sqrt{nf^4 + 2f^2[z^2] + [z^4] + [x^2z^2]}}, \quad m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[x^2] + [z^2]}}.$$

На основании полученных формул рассчитаем ожидаемые средние квадратические ошибки угловых элементов внешнего ориентирования и фокусного расстояния, а также коэффициенты корреляции на основании формул (3)–(7). С этой целью выберем три случая, для которых $f = 190$ мм; $\mu = \pm 0,005$ мм. Пусть для первого (схема 1) $x_1 = x_3 = -80$ мм, $x_2 = x_4 = 80$ мм, $z_1 = z_2 = 60$ мм, $z_3 = z_4 = -60$ мм, для второго (схема 2) имеем $x_1 = -80$ мм, $x_2 = -40$ мм, $x_3 = 40$ мм, $x_4 = 80$ мм, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 60$ мм, и наконец, третий случай (схема 3) отличается от второго тем, что аппликаты его точек равны нулю. Результаты вычислений приведены ниже:

Схема	$m_f, \text{мм}$	$m_{\alpha, \dots}$	$m_{\omega, \dots}$	$m_{x, \dots}$	$k_{f\alpha}$	$k_{f\omega}$	k_{fx}	$k_{\alpha\omega}$	$k_{\alpha x}$	$k_{\omega x}$
1	0,005	2,3	2,5	5,2	—	—	—	—	—	—
2	0,008	2,9	2,9	9,9	—	0,75	—	—	0,31	—
3	0,008	2,4	2,7	8,2	—	—	—	—	—	—

Исходя из этих данных, можно сделать предварительный вывод о том, что зависимость между определяемыми неизвестными наблюдается только в одном случае, когда точки расположены асимметрично хотя бы одной оси снимка (схема 2), т. е. попарная зависимость некоторых элементов обусловлена неудачным с точки зрения внутренних связей расположением опорных точек на фотографическом снимке, а не самой природой уравнений (1).

Для более полного анализа рассмотренных схем расположения опорных точек на снимке, оценим устойчивость решения полученных систем на макетах. С этой целью определим влияние ошибок свободных членов на точность вычисления неизвестных.

Результаты вычислений сведены в таблице, где в числителе записана вводимая ошибка свободного члена в процентах от его безошибочного значения, а в знаменателе — возникающая в соот-

Ошибки элементов ориентирования

Единицы измерений	Макет 1			Макет 2		
	Схема 1	Схема 2	Схема 3	Схема 1	Схема 2	Схема 3
f	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{5,8}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-4,8}$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-2,2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{3,2}$	$\frac{1,0}{1,0}$
ω	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{2,0}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-1,0}$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-3,0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{4,0}$	$\frac{1,0}{1,0}$
α	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-3,0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{4,0}$	$\frac{1,0}{1,0}$
	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{-3,0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1,0}{1,0}$	$\frac{1,0}{4,0}$	$\frac{1,0}{1,0}$

ветствующем определяемом элементе. Ошибки приведены в процентах от их собственного значения. Для вычисления свободных членов приняты значения $\delta f = 0,1$ мм, $\delta \alpha = \delta \omega = \delta \kappa = 1,30''$.

Как и следовало ожидать, расположение опорных точек на фототеодолитных снимках согласно схемам 1 и 3 не приводит к перераспределению ошибок и сама ошибка определяемого элемента не превосходит погрешности соответствующего свободного члена. В схеме 2 ошибка свободного члена значительно искажает не только соответствующий, но и коррелируемый с ним члены, т. е. она перераспределяется.

Из полученных результатов следует:

съемка карьера со смещенным объективом фототеодолита при уравнивании элементов ориентирования приводит к значительным искажениям этих элементов;

наиболее высокой точности определения пространственных координат точек карьера можно добиться только при симметричном расположении опорных точек на фототеодолитном снимке.

Первый из сделанных выводов требует дополнительных опорных точек при сгущении сети стереофотографическим методом, расположенных на дне карьера, т. е. в его рабочей зоне. Эти требования крайне затруднительно выполнить: во-первых в рабочей зоне карьера точки слишком недолговечны; во-вторых, достаточно сложно определять их координаты, особенно высотные отметки.

Для устранения этих неудобств возможны два варианта. Первый — идти на преднамеренное снижение точности определения

элементов внешнего ориентирования, выполняя фотографирование при нулевом положении объектива (при условии примерного равенства отметок точек базиса и опорных). Второй (на наш взгляд, более правильный) — заменить опорные точки, расположенные в рабочей зоне, точками, на которые определены корректурные направления, измеренные с концов базиса [1].

Для съемок, выполняемых с целью картирования карьера, асимметричное расположение опорных точек допустимо, так как расчеты показывают, что взаимные искажения угловых элементов внешнего ориентирования составляют $\sim 20''$, фокусного расстояния — 0,03 мм.

1. *Смирнов Е. И.* Зависимость между координатами точек снимка и корректурными углами, измеренными с концов базиса // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. 1983. Вып. 38. С. 141—144. 2. *Финковский В. Я., Турук Д. Н.* Стереофотограмметрический способ определения деформаций бортов и уступов карьера // *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*. 1979. Вып. 30. С. 195—200.

Статья поступила в редколлегию 12. 01. 87