УДК 528.34:516.3

Э. А. БОРИСОВ

ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СПУТНИКОВ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ЗОНАЛЬНЫМИ ГАРМОНИКАМИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Использование в целях космической геодезии искусственных спутников Земли (ИСЗ) с широким диапазоном орбит (от круговых до близпараболических) требует единого математического аппарата для изучения их движения. Применение численных методов оправдано на современном этапе из-за отсутствия аналитических решений, которые могли бы дать как количественную (с любой заданной точностью), так и качественную характеристики для всех видов орбит. Применение классических теорий движения небесных тел имеет ограничения для ряда ИСЗ по орбитальным параметрам. Устранить частные недостатки этих теорий можно, например, путем их модификации. Полученные при этом дифференциальные уравнения движения расширяют область применения исходной аналитической теории.

При изучении движения ИСЗ с большими эксцентриситетами можно ввести в состав элементов орбиты такую величину, которая обеспечивала бы абсолютную сходимость рядов координат движения для всех эллиптических орбит. В работе [2] в качестве таковой принят параметр

$$\eta = \varepsilon \exp \sqrt{1-\varepsilon^2}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим возмущения элементов орбиты от воздействия зональных гармоник геопотенциала для систем $\{\Omega, i, a, \eta, \pi, \varepsilon\}$ и $\{\Omega, i, a, \eta, \omega, M_0\}$, из которых исключен эксцентриситет ε. Модифицированные уравнения движения для первой системы элементов получены в работе [2]. Для второй системы элементов уравнения будут иметь такой вид (в обозначениях [2]):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i};$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}; \quad \frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\partial R}{\partial M_0};$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\eta p \sqrt{p}}{a\sqrt{\mu}(a-p)} \cdot \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\eta p}{\sqrt{\mu a}(a-p)} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega};$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\eta p}{\sqrt{\mu a}\,(a-p)}\cdot\frac{\partial R}{\partial \eta}-\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu p}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i};$$

$$\frac{dM_0}{dt}=-2\sqrt{\frac{a}{\mu}}\cdot\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{\eta p\sqrt{p}}{a\sqrt{\mu}\,(a-p)}\cdot\frac{\partial R}{\partial \eta}. \qquad (1)$$

Пертурбационную функцию R, обусловленную несферичностью Земли, получим исходя из разложения R [1]. Подставляя $M=\varepsilon-\pi+nt$, $\omega=\pi-\Omega$ и учитывая на основании работы [3], что $X(\varepsilon)=X(\eta)$, после преобразований получим

$$R=\frac{\mu}{a}\sum_{k=1}^{k}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\sum_{q=-\infty}^{k}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{kje}(i)\,X_{k-2l+q}^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\times$$
$$\times\left[(k-2l+q)M+(k-2l)\,\omega+j\,(\Omega-\varkappa)\right]\times$$
$$\times\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}C_{kj}\\ -S_{kj}\end{pmatrix}k-j=2s\\ \begin{pmatrix}S_{kj}\\ C_{kj}\end{pmatrix}k-j=2s+1\end{matrix}\right]. \qquad (2)$$

Обозначения в выражении (2) такие же, как в работе [1].

Для выделения возмущений элементов орбиты от зональной части геопотенциала выражение (2) рассмотрим при условии

$$k-2l+q=0,\quad k-2l\gtreqless 0,\quad j=0. \qquad (3)$$

При этом в процессе интегрирования (1) будут появляться вековые ($k-2l=0$) и долгопериодические ($k-2l\neq 0$) возмущения. Тогда, учитывая (2) и (3), получим систему уравнений движения, позволяющую выделить возмущения элементов из зональных гармоник (для систем элементов, указанных выше):

$$\frac{d\Omega}{dt}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{\operatorname{cosec} i}{a}\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k\frac{\partial F_{k0l}(i)}{\partial i}\,X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\times$$
$$\times C_{k0}\left[\begin{matrix}\cos(k-2l)\,\omega\\ \sin(k-2l)\,\omega\end{matrix}\right]\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{di}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{\operatorname{ctg} i}{a}\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}(k-2l)\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\,X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\times$$
$$\times C_{k0}\left[\begin{matrix}-\sin(k-2l)\,\omega\\ \cos(k-2l)\,\omega\end{matrix}\right]\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{n\eta p}{a-p}\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}(k-2l)\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\,X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\times$$
$$\times C_{k0}\left[\begin{matrix}\sin(k-2l)\,\omega\\ -\cos(k-2l)\,\omega\end{matrix}\right]\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{d\pi}{dt}=n\sqrt{\frac{a}{p}}\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sum_{p=-k}^{k}\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k\frac{\partial F_{k0l}(i)}{\partial i}\,X_0^{-k-1,\,|p|}(\eta)\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos\bar{p}\omega\\ \sin\bar{p}\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}+\frac{n\eta p}{a-p}\sum_{\bar{p}=-k}^{k}\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\times$$

$$\times\frac{\partial X_0^{-k-1,|\bar{p}|}(\eta)}{\partial\eta}C_{k0}\begin{bmatrix}\cos\bar{p}\omega\\ \sin\bar{p}\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=2n\sum_{\bar{p}=-k}^{k}\sum_{l=1}^{k-1}(k+1)\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\,X_0^{-k-1,|\bar{p}|}(\eta)\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos\bar{p}\omega\\ \sin\bar{p}\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}+n\sqrt{\frac{a}{p}}\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sum_{\bar{p}=-k}^{k}\sum_{l=1}^{k-1}\times$$

$$\times\left(\frac{r_0}{a}\right)^k\frac{\partial F_{k0l}(i)}{\partial i}X_0^{-k-1,|\bar{p}|}(\eta)\,C_{k0}\begin{bmatrix}\cos\bar{p}\omega\\ \sin\bar{p}\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}+$$

$$+\frac{n\eta p}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{p})}\sum_{\bar{p}=-k}^{k}\sum_{l=1}^{k-1}\times$$

$$\times\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\frac{\partial X_0^{-k-1,|\bar{p}|}(\eta)}{\partial\eta}C_{k0}\begin{bmatrix}\cos\bar{p}\omega\\ \sin\bar{p}\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{n\eta p}{a-p}\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\frac{\partial X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)}{\partial\eta}\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos(k-2l)\omega\\ \sin(k-2l)\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}-\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{\operatorname{ctg} i}{a}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k\frac{\partial F_{k0l}(i)}{\partial\eta}X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos(k-2l)\omega\\ \sin(k-2l)\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix};$$

$$\frac{dM_0}{dt}=2n\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}(k+1)\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\,X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos(k-2l)\omega\\ \sin(k-2l)\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}-\frac{n\eta p}{a-p}\sqrt{\frac{p}{a}}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{k}\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k F_{k0l}(i)\frac{\partial X_0^{-k-1,\,k-2l}(\eta)}{\partial\eta}\times$$

$$\times C_{k0}\begin{bmatrix}\cos(k-2l)\omega\\ \sin(k-2l)\omega\end{bmatrix}\begin{matrix}k=2s\\ k=2s+1\end{matrix}. \qquad (4)$$

Здесь $\bar{p}$ — индекс, p — фокальный параметр. Коэффициент Ганзена $X_0^{s,\,k}(\eta)$ определяется по работе [3], а его производная равна

$$\frac{\partial X_0^{-k-1,\,\bar{p}}(\eta)}{\partial\eta}=\frac{\sqrt{a-p}}{\eta\sqrt{p}}\left\{\frac{\bar{p}+k+1}{2}X_0^{-k-2,\,\bar{p}+1}(\eta)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{p}-k-1}{2}X_0^{-k-2,\,\bar{p}-1}(\eta)+\frac{\bar{p}a}{2p}\left[X_0^{-k-1,\,\bar{p}+1}(\eta)-X_0^{-k-1,\,\bar{p}-1}(\eta)\right]\right\}.$$

Значения производных $\partial F_{k0l}(i)/\partial i$ и $\partial X_{k-2l+q}^{-k-1,\,k-2l}(\eta)/\partial\eta$ вычислены для значений $k=2, 3, 4$.

Интегрированием (4) найдем вековые и долгопериодические возмущения элементов от соответствующей и зональной гармоники:

а) влияние C_{20}

$$\delta\Omega=\frac{3}{2}n\left(\frac{r_0}{p}\right)^2\cos i\cdot C_{20}\cdot t;$$

$$\delta\omega=-3n\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)C_{20}\cdot t;$$

$$\delta\mu_0=-\frac{3}{2}n\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{r_0}{p}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)C_{20}\cdot t;$$

$$\delta\pi=-\frac{3}{2}n\left(\frac{r_0}{p}\right)^2\left(2-\cos i-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)C_{20}\cdot t;$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=-\frac{3}{4}n\left(\frac{r_0}{p}\right)^2\left[(4-2\cos i-5\sin^2 i)+\sqrt{\frac{p}{a}}(2-3\sin^2 i)\right]C_{20}\cdot t;$$

б) влияние C_{30} (5)

$$\delta\eta=\frac{3\pi\eta p}{a}\sqrt{\frac{p}{a-p}}\left(\frac{r_0}{p}\right)^3\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin i\cdot\cos\omega\cdot C_{30};$$

$$\delta\pi=-\frac{3\pi\sqrt{a}}{\sqrt{a-p}}\left(\frac{r_0}{p}\right)^3\left[\frac{a-p}{a}\operatorname{tg}\frac{i}{2}\left(4+5\cos i-5\sin^2 i-\frac{35}{4}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\cos i\cdot\sin^2 i\right)+\sin i\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\right]\sin\omega\cdot C_{30};$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=-\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{a-p}{a}}\left(\frac{r_0}{p}\right)^3\left[\left(4\sqrt{\frac{p}{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{p}}+4\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)+\frac{(1-\cos i)\cos i}{\sin^2 i}\left(1-\frac{15}{4}\sin^2 i\right)\right]\sin i\cdot\sin\omega\cdot C_{30};$$

в) влияние C_{40} (6)

$$\delta\eta=\frac{45\pi\eta p}{23a}\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{r_0}{a}\right)^4\left(1-\frac{7}{6}\sin^2 i\right)\sin^2 i\cdot\sin 2\omega\cdot C_{40};$$

$$\delta\pi=\frac{15\pi}{16}\left(\frac{r_0}{p}\right)^4\left\{\left[3\frac{a-p}{a}\left(6-4\cos i+7\cos i\cdot\sin^2 i-31\sin^2 i+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{63}{4}\sin^4 i\Big)+(16-8\cos i+14\cos i\cdot\sin^2 i-62\sin^2 i+49\sin^4 i)\Big]+$$

$$+\Big[\frac{a-p}{a}\Big(-6+6\cos i-14\cos i\cdot\sin^2 i+35\sin^2 i-\frac{63}{2}\sin^4 i\Big)+$$

$$+(6\sin^2 i-7\sin^4 i)\Big]\cos 2\omega\Big\}C_{40};$$

$$\delta\varepsilon=\frac{15\pi}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_0}{p}\right)^4\Big\{\frac{3}{4}\sin^2 i\left(1-\frac{7}{6}\sin^2 i\right)\Big[(\sqrt{a}-\sqrt{p})+$$

$$+\left(\frac{5}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{p})+\frac{\sqrt{a}\cos i}{1+\cos i}\right)\frac{a-p}{a}\Big]\cos 2\omega+\sqrt{a}\times$$

$$\times\Big[\left(1-5\sin^2 i+\frac{35}{8}\sin^4 i\right)-\cos i(1-\cos i)\left(1-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\Big]+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{a-p}{a}\Big[\left(1-5\sin^2 i+\frac{35}{8}\sin^4 i\right)\times$$

$$\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{p}}{2}-\cos i(1-\cos i)\left(1-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\sqrt{a}\Big]\Big\}C_{40}. \quad (7)$$

Из выражения (5) следует, что вековым возмущениям подвергаются только угловые элементы, и в первом приближении в элементах орбиты не возникают долгопериодические возмущения от второй зональной гармоники.

Список литературы: 1. *Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах. — Бюллетень ИТА, 1967, т. 11, № 2 (125). 2. *Борисов Э. А.* Уравнения возмущенного движения эллиптических орбит с большими эксцентриситетами. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, 1973, № 6. 3. *Борисов Э. А.* О разложении пертурбационной функции в задаче трех тел. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, 1974, № 4.

Статья поступила в редколлегию 02. 04. 81