УДК 528.16:519.214

С. Д. ВОЛЖАНИН

ОБ ОПЫТЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ ПО МЕТОДУ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В последние годы проявляется интерес к уравнительным вычислениям по принципам, отличным от широко применяемого метода наименьших квадратов (МНК) [1, 2, 4]. В частности, в работах [1, 2] предлагается уравнивать геодезические сети при условии минимизации максимального по модулю остаточного уклонения (1), т. е. использовать равномерные приближения или чебышевский минимакс.

$$\max|v| \longrightarrow \min \equiv \rho. \qquad (1)$$

Выполнение условия (1) гарантирует, что наибольшее значение абсолютной поправки из уравнивания не превосходит по модулю минимаксную ошибку ρ. Как известно, условие (2) — условие МНК.

$$\sum v^2 \rightarrow \min. \qquad (2)$$

Использование равномерных приближений для обширных систем уравнений стало доступным только с появлением современных ЭВМ. Один из возможных алгоритмов чебышевского минимакса приведен в работе [3]. На его основе была составлена программа решения несовместных систем линейных уравнений на языке программирования Фортран-IV для ЕС ЭВМ. Это позволило выполнить сравнение результатов уравнивания параметрическим методом конкретной сети трилатерации, в которой возникало 18 уравнений поправок с 12 неизвестными по МНК и минимаксу. Для сети, удовлетворяющей всем геометрическим условиям, уравнения поправок имеют вид

$$A\delta X=0, \tag{3}$$

где A — матрица коэффициентов; δX — вектор искомых параметров — суть поправки в приближенные координаты.

В правую часть уравнения (3) вводились «истинные» ошибки Δ измерения длин линий, принимаемые далее за свободные члены уравнения поправок.

$$L=\Delta, \tag{4}$$

где L —вектор свободных членов уравнений поправок.

Тогда уравнение (3) с учетом (4) примет вид

$$A\delta X-L=v, \tag{5}$$

в котором v — вектор остаточных уклонений.

Было выбрано семь вероятностных моделей распределения «истинных» ошибок: пять из них с нормальным законом и два с равномерным. Ошибки, соответствующие каждой модели, вводились в уравнение (4), и система решалась по минимаксу и МНК. Для каждой модели выполнялось 50 циклов моделирования вектора (4) с последующим уравниванием.

Затем вычислялись дисперсии (6), (7) для одного цикла и средние дисперсии (8), (9) из 50 циклов.

В дальнейшем используем известное понятие эффективности оценок. Эффективными являются оценки, обладающие минимальной дисперсией. Для сравнения результатов уравнивания в описываемых исследованиях по (6)—(9) были получены величины дисперсий

$$d_j^{\text{мм}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta_i-v_i^{\text{мм}})^2}{N-1}; \quad (6) \qquad d_j^{\text{мнк}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(\Delta_i-v_i^{\text{мнк}})^2}{N-1}; \quad (7)$$

$$d_0^{\text{мм}}=\frac{\sum\limits_{j=1}d_j^{\text{мм}}}{s}; \quad (8) \qquad d_0^{\text{мнк}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{s}d_j^{\text{мнк}}}{s}, \quad (9)$$

где N — число уравнений поправок; s — число циклов уравнивания; Δ_i — «истинная» ошибка, вводимая в i уравнение; $v_i^{мм}$ — остаточное уклонение, получаемое в i уравнении после уравнивания по минимаксу; $v_i^{мнк}$ — после уравнивания по МНК; $d_j^{мм}$ — дисперсия ошибок уравнивания в j цикле уравнивания по минимаксу; $d_j^{мнк}$ — по МНК; $d_0^{мм}$ — средняя дисперсия ошибок уравнивания по минимаксу для заданной вероятностной модели «истинных» ошибок; $d_0^{мнк}$ — то же при уравнивании по МНК.

Было установлено, что при уравнивании по минимаксу нормально распределенных «истинных» ошибок с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим разбросом $\pm 0{,}8$; $\pm 0{,}1$; $\pm 0{,}5$ в 16—18 циклах из 100 выполнялось

$$d_j^{мм} < d_j^{мнк}.$$

При уравнивании по минимаксу, число циклов для которых выполнялось, приведенное выше соотношение увеличивалось для смещенных нормальных моделей с математическим ожиданием M, равным 0,5 и —1,0, до 35%, а при равномерных моделях с ошибками, распределенными в интервале $+0{,}5 \div -0{,}5$, до 24%. Для ошибок, равномерно распределенных в интервале $0 \div 1$, эффективность уравнивания по МНК и минимаксу была равна 50%.

Из уравнений погрешностей по остаточным уклонениям определялись среднеквадратические ошибки:

$$\mu_{мм} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} v_{мм}^2}{N-R}}; \quad (10) \qquad \mu_{мнк} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} v_{мнк}^2}{N-R}} \quad (11)$$

где R — число неизвестных параметров δX.

Эмпирически получен коэффициент k в (12), который задает соотношение между основными характеристиками уравнивания по МНК суммой квадратов остаточных уклонений и минимаксной ошибкой ρ в чебышевском минимаксе.

$$\mu_{мнк} = k\rho. \quad (12)$$

При различных вероятностных моделях «истинных» ошибок величина k находилась в пределах

$$1{,}17 < k < 1{,}46.$$

В табл. 1 приведены для каждой вероятностной модели усредненные из 50 циклов значения величин $d_0^{мм}$, $d_0^{мнк}$, $\mu_{мнк}$, $|v|_{max} = \min = \rho$ и k, которые являются основными характеристиками при оценке точности результатов измерений по МНК и минимаксу.

Таблица 1. Основные параметры, полученные из уравнивания по МНК и минимаксу для сети трилатерации

Вид распределения	Нормальное										Равномерное			
Мат. ожидание	$M=0$						$M=0{,}5$		$M=-1$		$M=0{,}5$		$M=0{,}5$	
Ср. кв. размах	$\pm0{,}1$		$\pm0{,}5$		$\pm0{,}8$		$\pm0{,}5$		$\pm0{,}5$		$-0{,}5\div+0{,}5$		$0\div1$	
	мм	мнк	мм	мнк	мм	мнк	мм	мнк	мм	мнк	мм	мнк	мм	мнк
d_0	0,09	0,08	0,47	0,39	0,75	0,63	2,01	1,96	1,09	1,03	0,25	0,22	0,48	0,49
m_{d_0}	0,02	0,02	0,11	0,09	0,19	0,14	0,20	0,11	0,14	0,10	0,05	0,03	0,07	0,05
Эффективность (%)	18	82	16	84	18	82	34	66	34	66	24	76	50	50
ρ	0,08		0,42		0,68		0,71		0,61		0,21		0,24	
$m_\rho\pm$	0,07		0,13		0,21		0,24		0,08		0,05		0,08	
μ		0,10		0,51		0,81		1,04		0,75		0,25		0,28
$m_\mu\pm$		0,03		0,14		0,22		0,21		0,11		0,06		0,08
k		1,25		1,21		1,19		1,46		1,23		1,19		1,17

После 50 циклов уравнивания было выполнено сравнение параметров, полученных при решении системы (5) по МНК и минимаксу.

Известно, что в МНК

$$m_{\delta X}=\mu_0\sqrt{Q_{XX}}, \tag{13}$$

где $m_{\delta X}$ — среднеквадратическая ошибка искомых параметров; μ_0 — ошибка единицы веса, Q_{XX} — соответствующий диагональный элемент обратной матрицы нормальных уравнений.

Вероятнейшие значения неизвестных из каждого способа уравнивания были определены усреднением результатов для каждой вероятностной модели. Оценка результатов уравнивания по МНК выполнялось также и по (14)

$$m_{\delta_x}^{\text{мнк}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{S}(\delta X_i^{\text{мнк}}-\delta X_0^{\text{мнк}})^2}{S-1}}, \tag{14}$$

где $\delta X_0^{\text{мнк}}$ — среднее значение искомого параметра; $\delta X_i^{\text{мнк}}$ — параметр, полученный из i цикла уравнивания по МНК; S — число циклов уравнивания.

Аналогично (уравнение 15) выполнялась оценка точности результатов уравнивания по минимаксу

$$m_{\delta x}^{\text{мм}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{s} (\delta X_i^{\text{мм}} - \delta X_0^{\text{мм}})^2}{S-1}}. \tag{15}$$

Кроме этого, для априорной приближенной оценки точности оказалось полезным воспользоваться соотношением (16), которое эмпирически связывает результаты оценки точности по МНК и минимаксу

$$m_{\delta X}^{\text{мм}} = \mu_{\text{мм}} \sqrt{Q_{XX}}, \tag{16}$$

где $\mu_{\text{мм}}$ — средняя из 50 циклов среднеквадратическая ошибка остаточных уклонений по минимаксу.

Таблица 2. **Оценка точности уравненных параметров по МНК и минимаксу (нормальное распределение ошибок)**

Неизвестные параметры	Модель M=0, $m=\pm 0{,}8$			Модель M=0, $m=\pm 0{,}1$		
	величина (м)	оценка из 50 циклов	$m_{\delta X}=\mu\sqrt{Q_{XX}}$	величина (м)	оценка из 50 циклов	$m_{\delta X}=\mu\sqrt{Q_{XX}}$
По МНК						
δX_1	0,034	±1,063	±1,105	0,004	±0,133	±0,138
δX_2	−0,020	±0,973	±1,051	−0,004	±0,121	±0,131
δX_3	0,262	±0,524	±0,592	0,003	±0,066	±0,074
δX_4	0,181	±1,526	±1,500	0,023	±0,191	±0,187
δX_5	0,289	±1,058	±1,008	0,036	±0,132	±0,126
δX_6	−0,134	±0,552	±0,657	−0,017	±0,069	±0,082
По минимаксу						
δX_1	0,058	±1,519	±1,433	0,006	±0,189	±0,179
δX_2	−0,043	±1,337	±1,363	−0,005	±0,167	±0,170
δX_3	0,222	±0,636	±0,768	0,029	±0,078	±0,096
δX_4	0,033	±2,297	±1,947	0,004	±0,287	±0,244
δX_5	0,291	±1,320	±2,308	0,048	±0,170	±0,164
δX_6	−0,113	±0,695	±0,855	−0,015	±0,087	±0,107

В табл. 2 приведены значения некоторых параметров, полученных из уравнивания, и их оценка точности для двух вероятностных моделей. Оказывается, что определяя величину $\mu_{\text{мм}}$, можно достаточно уверенно оценивать погрешность полученных из уравнивания по чебышевскому минимаксу неизвестных параметров.

Проведенные исследования позволяют заключить, что:

1. В некоторых случаях целесообразно получать поправки в измеренные величины, используя условие минимизации максимального остаточного уклонения.

По сравнению с МНК, как оказывается, это не приводит к существенному увеличению суммы квадратов остаточных уклонений.

2. Эффективность уравнивания по минимаксу увеличивается для ошибок, имеющих распределение, близкое к прямоугольному.

3. В нашем случае оценка точности уравненных элементов по минимаксу дает удовлетворительные результаты при использовании соотношения (16).

Список литературы: 1. *Скрыль В. А.*, О составлении уравнений поправок при уравнивании методом чебышевских приближений. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 22. 2. *Скрыль В. А.* О применении метода чебышевского приближения для уравнительных вычислений. — Пробл. мат. обраб. геодезических сетей. Материалы Всесоюзной конф. Новосибирск, 1977. Новосибирск, 1979. 3. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейные и выпуклое программирование. — М.: Наука 1964. 4. *Heindl G., Reinhart E.* Eine allgemeine Methoden zur Berechnung von MINIMAX. Fehlern. — ZfV, 1976, N 4, 6.

Статья поступила в редколлегию 10. 04. 81