

А. В. БУТКЕВИЧ, Н. Н. ЯКОВИНИЧ

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ  
С ПОМОЩЬЮ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЭЛЛИпсоИДА НА ШАРЕ  
С МИНИМАЛЬНЫМИ ИСКАЖЕНИЯМИ**

Рассмотрим возможность применения для решения обратной геодезической задачи на средние расстояния ( $S \leq 600 \dots 800$  км) такой произвольной проекции эллипсоида на шаре, в которой искажения длин линий и направлений весьма малы и для ряда специальных задач геодезии пренебрегаемы.

Для определения трех постоянных проекции (радиуса шара  $\bar{R}$ ,  $\alpha$  и  $\varphi_m$ ) поставим три условия: чтобы масштабы  $n_1$  и  $n_2$  на двух заданных параллелях с широтами  $B_1$  и  $B_2$ , проходящих через конечные точки геодезической линии  $P_1P_2$ , и средний (интегральный) масштаб по меридиану  $m_m$  между параллелями  $B_1$  и  $B_2$  равнялись единице\*.

Тогда условия, характеризующие данную проекцию, будут иметь вид:

$$n_1 = \alpha \bar{R} \cos \varphi_1 / r_1 = 1, \quad (1)$$

$$n_2 = \alpha \bar{R} \cos \varphi_2 / r_2 = 1, \quad (2)$$

$$m_m = \bar{R} \Delta \varphi / (X_2 - X_1) = 1, \quad (3)$$

где  $\alpha = d\lambda/dL$  — долготная постоянная;  $\bar{R}$  — радиус шара;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — сферические широты;  $r_i = N_i \cos B_i$  — радиус параллели;  $X_i$  — длина дуги меридиана от экватора до заданной широты  $B_i$ .

Согласно (1) и (2), шар будет пересекать эллипсоид по двум параллелям (см. рисунок). Из (1) и (2) получим

$$\cos \varphi_1 = r_1 / \alpha \bar{R}, \quad (4)$$

$$\cos \varphi_2 = r_2 / \alpha \bar{R}. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4), после несложных преобразований имеем

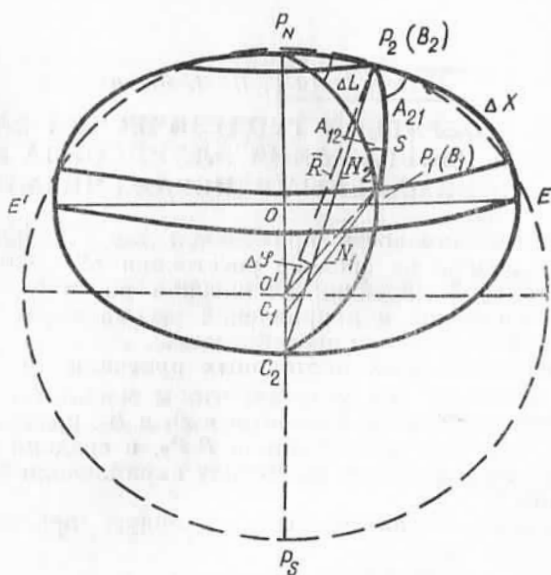
$$2 \sin \varphi_m \sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{r_2 - r_1}{\alpha \bar{R}} = \frac{\Delta r}{\alpha \bar{R}}, \quad (6)$$

\* В этом случае искажения азимутов и расстояний будут малы.

или 
$$\sin \varphi_m = \frac{\Delta r}{2rR} \operatorname{cosec} \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (7)$$

Аналогично, суммируя (4) и (5), получаем

$$2 \cos \varphi_m \cos \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{r_1 + r_2}{\alpha R} = \frac{\Sigma r}{\alpha R}, \quad (8)$$



Проекция эллипсоида на шар.

или 
$$\cos \varphi_m = \frac{\Sigma r}{2\alpha R} \sec \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (9)$$

Из (7) и (9) получим еще одну замкнутую формулу для средней сферической широты  $\varphi_m$ , не содержащую постоянной  $\alpha$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{\Delta r}{\Sigma r} \operatorname{ctg} \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (10)$$

Из (9) нетрудно получить формулу для постоянной проекции  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\Sigma r}{2R} \sec \varphi_m \operatorname{cosec} \frac{\Delta \varphi}{2}. \quad (11)$$

Постоянную  $\alpha$  можно определить и иначе. Так, если потребовать лишь равенства масштабов по нормальным параллелям и среднего по меридиану, т. е.  $n_1 = n_2 = m_m$ , то на основании (1), (2) и (3) будем иметь

$$\alpha \bar{R} \cos \varphi_i / r_i = \bar{R} \Delta \varphi / \Delta X, \quad (12)$$

откуда

$$\alpha = r_i \Delta \varphi \sec \varphi_i / \Delta X. \quad (13)$$

Вычисления показали, что (11) и (13) дают одинаковые значения для  $\alpha$ , что обеспечивает контроль.

Для вычисления разности азимутов  $\Delta \bar{\alpha}$  и среднего азимута  $\bar{\alpha}_m$  на шаре известны формулы [2]:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \bar{\alpha}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}}. \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \cos \varphi_m}{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}. \quad (15)$$

Подставив в эти выражения  $\sin \varphi_m$  и  $\cos \varphi_m$  из (7) и (9), выводим новые формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \bar{\alpha}}{2} = \frac{\Delta r}{\alpha \bar{R}} \operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{cosec} \Delta \varphi. \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m = \frac{\varphi r}{\alpha \bar{R}} \operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{cosec} \Delta \varphi. \quad (17)$$

Можно полагать, что (16) и (17) удобнее, чем (14) и (15), так как не содержат  $\sin \varphi_m$  и  $\cos \varphi_m$  и имеют много общих сомножителей.

Чтобы исключить функцию  $\Delta \varphi / 2$  из (7), путем разложения  $\sin \frac{\Delta \varphi}{2}$  в ряд получим

$$\sin \varphi_m = \frac{\Delta r}{\alpha \bar{R} \Delta \varphi} \left( 1 + \frac{\Delta \varphi^2}{24} + \dots \right), \quad (18)$$

а затем, используя выражение (при  $m_m = 1$ )

$$\Delta \varphi = \Delta X / \bar{R}, \quad (3')$$

выведем формулу

$$\sin \varphi_m = \frac{\Delta r}{\alpha \Delta X} \left( \sec \frac{\Delta \varphi}{2} \right)^{1/3}. \quad (19)$$

Здесь ошибка в  $\Delta \varphi$  мало влияет на  $\sin \varphi_m$ , так как  $\sec \frac{\Delta \varphi}{2}$  — функция медленно изменяющаяся.

Из (10) и (3') получаем еще одну формулу для средней широты  $\varphi_m$

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{2\bar{R}\Delta r}{\Sigma r \Delta X} \left( \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right)^{2/3}. \quad (20)$$

Сферическое расстояние  $\sigma$  вычисляем по формулам

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_m \sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\sin \alpha_m} = \frac{\Sigma r \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta r \sin \alpha_m}, \quad (21)$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\Delta\alpha}{2}}{\cos \alpha_m} = \frac{\Delta r \operatorname{ctg} \varphi_m \cos \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Sigma r \cos \alpha_m}, \quad (22)$$

а расстояния на эллипсоиде  $S$  определяем так:

$$S = \sigma'' \bar{R} / \rho''. \quad (23)$$

Обратную задачу решаем следующим образом:

1. В качестве радиуса шара, согласно рекомендациям [6], для обработки радиогеодезических измерений примем среднее геометрическое из средних радиусов для широт  $B_1$  и  $B_2$ , т. е.

$$\bar{R} = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\sqrt{M_1 N_1} \sqrt{M_2 N_2}}. \quad (24)$$

2. После этого вычислим разность сферических широт  $\Delta\varphi$  согласно (3).

3. По (10) определим среднюю сферическую широту  $\varphi_m$ .

4. Найдем постоянную проекции  $a$  с контролем по (11) и (13).

5. Определим сферическую разность долгот по формуле

$$\Delta\lambda = a\Delta L \quad (25)$$

и решим обратную геодезическую задачу по формулам (16), (17) и (22).

Для проверки полученных формул и исследования искажений азимутов и расстояний на шаре в полученной проекции были составлены алгоритмы решения обратных геодезических задач. Результаты вычислений для расстояний  $S = 391; 566; 782$  и  $1000$  км приведены в таблице. Поправки азимутов  $\psi$  и расстояний  $\delta S$  получены путем сравнения с результатами более точного решения обратных геодезических задач на эллипсоиде по формулам с выделенными сферическими членами [2].

Как видно из таблицы, расхождения  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\delta S$  между точными значениями азимутов и длин линий на эллипсоиде и значениями, полученными на шаре, очень малы ( $< 0,01''$  и  $0,01$  м)

\* Отметим, что такое же значение радиуса шара для равнопромежуточной проекции эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями получила Е. Н. Новикова [3].

Результаты решений обратных геодезических задач

$S_{KM}$	391	566	782	1000
$B_1$	50°40'00,000"	54°25'00,000"	50°40'00,000"	30°00'00,000"
$B_2$	53 10 00,000	59 10 00,000	55 30 54,450	37 41 15,200
$\Delta B$	2 30 00,000	4 45 00,000	4 50 54,450	7 41 15,200
$\Delta L$	4 00 00,000	3 20 00,000	8 28 39,280	5 39 16,400
$B_m$	51 55 00,000	56 47 30,000	53 05 27,225	33 50 37,600
$\varphi_m$	51°52'52,187"	56°45'55,998"	53°02'28,482"	33°46'59,451"
$\Delta\varphi$	2 29 48,482	4 44 42,705	4 50 33,250	7 40 11,261
$\alpha$	1,00048751	1,00030151	1,00043599	1,00059777
$\frac{\Delta\lambda}{\alpha_m}$	4 00 07,014	3 20 03,620	8 28 52,592	5 39 48,924
$\frac{\Delta\alpha}{2}$	44 42 33,019	21 04 23,820	46 31 43,990	31 34 44,813
$\bar{\alpha}_{12}$	43°08'03,566"	19°40'38,965"	43°08'03,570"	30°00'00,254"
$A_{12}$	03,566"	38,963"	03,568"	00,252"
$\psi_1 = A_{12} - \bar{\alpha}_{12}$	0,000"	-0,002"	-0,002"	-0,002"
$\bar{\alpha}_{21}$	226°17'02,472"	202°28'08,675"	229°55'24,410"	213°09'29,372"
$A_{21}$	02,472"	08,671"	24,414"	29,370"
$\psi_2 = A_{21} - \bar{\alpha}_{21}$	0,000"	-0,004"	+0,004"	-0,002"
$\bar{S}$	391200,32 м	566644,19 м	782400,70 м	999999,68 м
$S$	391200,32 м	566644,20 м	782400,69 м	999999,74 м
$\delta S = S - \bar{S}$	0,00 м	+0,01 м	-0,01 м	+0,06 м
$\alpha_{12}^\Gamma$	43°08'03,561"	19°40'38,960"	43°08'03,540"	30°00'00,268"
$\psi_1^\Gamma$	+0,005	+0,003	+0,026	-0,016
$\alpha_{21}^\Gamma$	226 17 02,447	202 28 08,680	229 55 24,460	213 09 29,380
$\psi_2^\Gamma$	-0,005	-0,009	-0,046	-0,010
$S^\Gamma$	391200,32 м	566644,20 м	782400,71 м	999999,70 м
$\gamma S^\Gamma$	0,00 м	0,00 м	-0,02 м	+0,04 м

и для целей морской геодезии и навигации неощутимы. Предлагаемая проекция эллипсоида на шаре может найти применение в геодезии и морской геодезии для решения обратной геодезической задачи и других задач на средние расстояния.

Для сравнения в таблице приведены результаты решения ОГЗ с помощью второй проекции Гаусса со средней широтой и соответствующие поправки азимутов  $\psi^\Gamma$  и расстояний  $\delta S^\Gamma$ . Как видно, искажения азимутов в данной проекции меньше, чем в проекции Гаусса.

Полученные формулы и алгоритмы решения обратной геодезической задачи замкнуты и удобны для программирования на ЭВМ. Авторами составлена для них программа на языке «Фортран» для ЭВМ «ЕС-1022».

Разработанный способ решения ОГЗ с помощью полученной проекции проще известных классических способов решения обратной геодезической задачи на средние расстояния [1, 2, 5, 6], так как в данной проекции не требуются редуccionные вычисления, что значительно сокращает объем исходных данных и вычислений для ручного счета и для ЭВМ.

Искажения азимутов и расстояний были исследованы численным методом при решении на ЭВМ 150 обратных геодезических задач при  $B_m = 15, 30, 45, 60, 75^\circ$ ;  $\Delta B = 2, 4, 6, 8, 10^\circ$  и  $\Delta L = 0, 2, 4, 6, 8, 10^\circ$ . При этом поправки азимутов  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют одинаковые знаки («минус») и значение, что говорит о том, что источник погрешностей находится в  $\text{tg } a_m$ , а изображение геодезической линии пересекает дугу большого круга на шаре, примерно, посередине. Поправки  $\psi_1$  и  $\psi_2$  при  $B_m \geq 30^\circ$ ,  $\Delta B \leq 8^\circ$  и  $\Delta L \leq 10^\circ$  (расстояние до 1200 км) не превышают  $0,01''$  и убывают с широтой, т. е. пренебрегаемо малы. Поправки расстояний  $\delta S$  имеют знак «плюс», возрастают с широтой  $B_m$  и разностью долгот  $\Delta L$ , но убывают с разностью широт  $\Delta B$  и не превышают  $0,05$  м при  $\Delta B \leq 6^\circ$  ( $S \leq 660$  км) и  $0,09$  м при  $\Delta B \leq 10^\circ$  и  $\Delta L \leq 10^\circ$  ( $S \leq 1100 \dots 1400$  км).

Эту проекцию можно также применить для решения специальных задач геодезии и морской геодезии, решения линейных и угловых засечек, расчета сеток и др.

Авторы благодарят Л. Т. Моисееву (ОМСХИ) за предоставленные результаты решения обратных геодезических задач на эллипсоиде.

**Список литературы:** 1. Багратуни Г. В. Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1962. 2. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1964. 3. Новикова Е. Н. Равнопромежуточные по параллели проекции эллипсоида на шаре с несколькими нормальными параллелями. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1981, вып. 4. 4. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1969. 5. Цендровский К. К. Таблицы для вычисления сеток и приближенного решения геодезических задач на большие расстояния. Л., 1957. 6. Ющенко А. П. Картография. — Л.: Главсевморпуть, 1941.

