УДК 528.063.1

П.А.Медведев

НЕИТЕРАТИВНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШИРОТЫ ТОЧКИ

В последние годы опубликован ряд статей [3-5], в которых при переходе от прямоугольных геоцентрических координат x, y, z к геодезическим координатам B, L, H применяется решение алгебраического уравнения четвертой степени. .В качестве переменной чаще всего используется тангенс геодезической широты B.

(C) Медведев П.А., 1995

Как известно [2, с.194], для определения приведенной широты u необходимо решить трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} u = A + C \sin u, \tag{1}$$

где

$$A = \sqrt{1 - e^2}\,\frac{z}{R}; \quad C = \frac{ae^2}{R}; \quad R = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0. \tag{2}$$

Если в равенстве (1) $\sin u$ выразить через $\operatorname{tg} u$ и освободиться от иррациональности, то получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $t = \operatorname{tg} u$

$$t^4 - 2At^3 + 6a_1t^2 - 2At + A^2 = 0, \tag{3}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{6}\,(A^2 - C^2 + 1). \tag{4}$$

В отличие от уравнения с $\operatorname{tg} B$ [3,5], коэффициенты в равенстве (3) имеют более простой вид, а их значения при t и t^3 равны. Поэтому целесообразно $\operatorname{tg} u$ найти из решения (3), а затем определить $\operatorname{tg} B$.

Корни алгебраического уравнения четвертой степени выражаются через его коэффициенты с помощью радикалов и могут быть определены точно способом Феррари [1, с.239]. В этом случае равенство (3) приводится к виду

$$(t^2 - At + y_0)^2 - \left(\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1}\;t + \frac{A(1 - y_0)}{\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1}}\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Вспомогательная величина y_0 находится из решения уравнения третьей степени

$$y^3 + 3a_1y^2 - \frac{1}{2}\,A^2C^2 = 0. \tag{6}$$

Иногда многочлен (3) способом замены переменной приводят к неполному [1, с.239], в котором коэффициент при третьей степени становится равным нулю. Однако такой путь ведет к преобразованиям [5], усложняющим как структуру коэффициентов, так и алгоритм решения уравнения.

Для применения формул Кардано [1, с.234] с помощью подстановки

$$y = \widehat{y} + a_1$$

равенство (6) сводится к "приведенному":

$$\tilde{y}^3 + 3P\tilde{y} + 2Q_1 = 0, \qquad (7)$$

где

$$P = -a^2_1; \qquad Q_1 = -\left(a^3_1 + \frac{1}{4}A^2C^2\right).$$

Нетрудно установить, что выражение $A^2 - C^2 + 1$ будет отрицательным для точек, удаленных от центра Земли на расстояния не более 43 км. Поэтому можно считать $a_1 > 0$.

Так как

$$\Delta = Q^2_1 + P^3 = \frac{1}{16}(AC)^2\left[(AC)^2 + (2a_1)^3\right]$$

является положительным, то в уравнение (7) один корень $\tilde{y}_0$ действительный и два мнимых. Из того, что свободный член в (7) $2Q_1 < 0$ следует, что $\tilde{y}_0 > 0$. Тогда положительным будет и корень уравнения (6) $y = \tilde{y}_0 + a_1$, который вычисляем по следующему алгоритму:

1) $R = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$; 2) $A = \sqrt{1 - e^2}\,z/R$; 3) $C = ae^2/R$;

4) $a_1 = \frac{1}{6}(A^2 - C^2 + 1)$; 5) $Q = a^3_1 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$;

6) $D = \left|\frac{AC}{2}\right|\sqrt{2Q - (AC/2)^2}$; 7) $U = \sqrt[3]{D + Q}$;

8) $y_0 = a_1 + U + a^2_1/U$.

Если на калькуляторе не содержится операции "x^y", позволяющей извлечь кубический корень, то величину $U = \sqrt[3]{D + Q}$ определяют с помощью тождества $U = e^{\ln U}$, где $\ln U = 1/3\ln(D + Q)$.

С вычисленным значением y_0 корни уравнения (5) находят из решения двух квадратных уравнений

$$t^2 + \left(\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1} - A\right)t + y_0 + \frac{A(1 - y_0)}{\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1}} = 0; \qquad (8)$$

$$t^2 - \left(\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1} + A\right)t + y_0 - \frac{A(1 - y_0)}{\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1}} = 0. \qquad (9)$$

Выражения (8) и (9) можно упростить с помощью соотношения

$$|A(1 - y_0)| = \sqrt{C^2 + 2y_0 - 1} \cdot \sqrt{y_0^2 - A^2}. \qquad (10)$$

При этом учитываем, что при $z \geqslant 0$ $A \geqslant 0$, при $z < 0$ $A < 0$, коэффициенты $C > 0$ при любом z и $y_0 > |A|$.

Из четырех корней уравнения (3) условию задачи удовлетворяет только один, который определяют так:

$$\text{При } y_0 > 1 \qquad t = \begin{cases} M + \sqrt{M^2 - П}, & \text{если } z > 0; \\ -M_1 - \sqrt{M^2{}_1 - П}, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

$$\text{При } y_0 \leqslant 1 \qquad t = \begin{cases} M + \sqrt{M^2 - П}, & \text{если } z \geqslant 0; \\ -M_1 + \sqrt{M_1{}^2 - П}, & \text{если } z \leqslant 0, \end{cases}$$

где

$$M = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1} + A\right); \qquad П = y_0 + \sqrt{y_0^2 - A^2};$$

$$M_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C^2 + 2y_0 - 1} - A\right); \qquad П_1 = y_0 - \sqrt{y_0^2 - A^2}.$$

После этого вычисляют геодезическую широту

$$B = \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Приведенный алгоритм следует дополнительно определить для случая $R = 0$, когда коэффициенты A и C не имеют смысла. Но при $x = y = 0$ $B = 90^\circ$, если $z > 0$ и $B = -90^\circ$, если $z < 0$; $H = z - a\sqrt{1 - e^2}$, а долгота L будет неопределенной, и ей можно приписать любое значение.

Недостатком как этих, так и опубликованных ранее формул является то, что при $R \to 0$ коэффициенты A и C становятся бесконечно большими величинами. П.Пенев [3] передлагает для значений B, близких к $\pm 90^\circ$, вычислить не tgB, а ctgB. Но тогда бесконечно большая величина tgB заменяется бесконечно малой величиной ctgB, и тем самым оперирование с большими числами превращается в проблему не меньшей сложности - работу с малыми числами.

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1963. 2. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М., 1979. 3. Пенев П. Трансформация прямоугольных координат в геодезические с применением замкнутых формул // Изв.вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. N 3. С.30-33. 4. Frohlich H., Hansen H. Zur Loffußpunktberechnung bei rotationsellipsoidischer Bezugsflache // Allgemeine Vermessungs Nachrichten. 1976. 83. N5. P.175-179. 5. Varao Romao M.S. Transformacao de coordenadas cartesianas Tridimensionais em geograficas por um processo directo // Rev. Inst. Geogr. e Cadastral. 1987. P.87-94.