

Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 34. Респ. межвед. науч.-техн. сборник. — Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. — 132 с.

В сборнике публикуются работы, в которых освещаются новые результаты в развитии теории и методов геодезической астрономии и гравиметрии, теории фигуры Земли и планет, линейно-угловой триангуляции, трилатерации, а также исследования в области изучения земной и астрономической рефракции, геодезии и инженерной геодезии, фотограмметрии и аэрофото-геодезии.

Для преподавателей, научных работников институтов, аспирантов и студентов геодезического профиля, а также для работников геодезических и картографических учреждений.

Списки лит. в конце статей.

*Редакционная коллегия:* доц., канд. техн. наук Д. И. Маслич (отв. ред.), проф., д-р техн. наук Г. А. Мещеряков (зам. отв. ред.), доц., канд. техн. наук И. Н. Гудз (отв. секр.), проф., д-р техн. наук А. В. Буткевич, доц., канд. техн. наук Ф. Д. Заблоцкий, доц., канд. техн. наук В. А. Коваленко, А. Н. Колесник, проф., д-р техн. наук А. С. Лисичанский, проф., д-р техн. наук И. Ф. Монин, проф., д-р техн. наук А. Л. Островский, доц., канд. техн. наук Р. Г. Шилинюк, проф., д-р техн. наук В. М. Сердюков, проф., д-р техн. наук В. Я. Финковский.

Ответственный за выпуск доц., канд. техн. наук  
В. А. Коваленко

*Адрес редакционной коллегии:*

290646, г. Львов-13, ул. Мира, 12

Львовский ордена Ленина политехнический институт,  
геодезический факультет, тел. 79-78-32.

Г 20701—072 468—81 1902020000  
M225(04)—81

© Издательское объединение  
«Вища школа», 1981

УДК 528.412

П. И. БАРАН, С. Г. РАДОВ

## РЕШЕНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ ПО ДВУМ НЕСМЕЖНЫМ УГЛАМ

Координаты точки по двум несмежным углам, измеренным между четырьмя исходными пунктами, необходимо определять в следующих случаях: при морских промерах, когда исходные пункты расположены так, что секстаном невозможно измерить

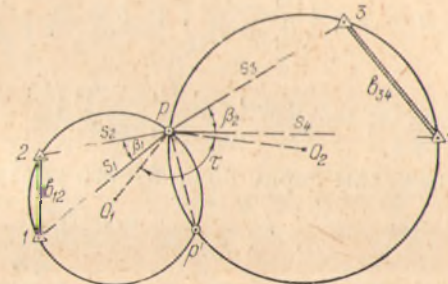


Рис. 1. Схема обратной засечки по двум несмежным углам.

два смежных угла [1]; при проведении инженерно-геодезических работ, например на территории крупных промышленных предприятий с обширной авто- и железнодорожной сетью, когда в период наблюдений неожиданно и надолго закрывается видимость на ранее намеченные опорные пункты, но открывается на другие два; при необходимости изменять высоту инструмента для обеспечения видимости на исходные пункты.

Координаты (рис. 1) находят, решая совместно уравнения двух окружностей, вмещающих измеренные в определяемой точке горизонтальные углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , для которых можно записать

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 &= \frac{(y_2 - y)(x_1 - x) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{(x_2 - x)(x_1 - x) + (y_2 - y)(y_1 - y)}, \\ \operatorname{tg} \beta_2 &= \frac{(y_4 - y)(x_3 - x) - (y_3 - y)(x_4 - x)}{(x_4 - x)(x_3 - x) + (y_4 - y)(y_3 - y)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  — координаты определяемой точки;  $x_i$  и  $y_i$  — координаты исходных пунктов ( $i=1, 2, 3, 4$ ). Уравнения (1) преобразуем к уравнениям двух окружностей

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + L_1 &= 0; \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + L_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $A_1 = (y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \beta_1 - (x_1 + x_2)$ ;  $B_1 = (x_1 - x_2) \operatorname{ctg} \beta_1 - (y_1 + y_2)$ ;  
 $L_1 = x_1(x_2 - y_2 \operatorname{ctg} \beta_1) + y_1(y_2 + x_2 \operatorname{ctg} \beta_1)$ ;  $A_2 = (y_4 - y_3) \operatorname{ctg} \beta_2 -$   
 $-(x_3 + x_4)$ ;  $B_2 = (x_3 - x_4) \operatorname{ctg} \beta_2 - (y_3 + y_4)$ ;  $L_2 = x_3(x_4 -$   
 $- y_4 \operatorname{ctg} \beta_2) + y_3(y_4 + x_4 \operatorname{ctg} \beta_2)$ . (3)

Для решения системы (2) воспользуемся уравнением радикальной оси [2]

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (L_1 - L_2) = 0. \quad (4)$$

Решив его относительно  $y$  и подставив в первое из уравнений системы (2), после преобразования получим

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (5)$$

где  $a = 1 + \left(\frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}\right)^2$ ;  $b = A_1 + \frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2} \left(2 \frac{L_1 - L_2}{B_1 - B_2} - B_1\right)$ ;

$$c = L_1 + \frac{L_1 - L_2}{B_1 - B_2} \left(\frac{L_1 - L_2}{B_1 - B_2} - B_1\right). \quad (6)$$

Вычислим корни квадратного уравнения (5)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

и, подставив их в уравнение (4), определим ординаты точек пересечения двух окружностей

$$y_{1,2} = -\left(\frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2} x_{1,2} + \frac{L_1 - L_2}{B_1 - B_2}\right). \quad (8)$$

Чтобы выбрать из двух точек пересечения окружностей  $P$  и  $P'$  точку стояния, необходимо определить в ней дирекционный угол на один из исходных пунктов или измерить дополнительно горизонтальный угол. В последнем случае получим не только однозначное решение, но и проконтролируем выполнение полевых работ.

Для оценки точности обратной засечки по двум несмежным углам воспользуемся известной зависимостью

$$M_p = \frac{1}{\sin \tau} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad (9)$$

где  $m_1, m_2$  — погрешности положения искомого угла по направлению к центрам окружностей;  $\tau$  — угол между этими направ-

лениями. Дирекционные углы направлений погрешностей линий положения для угла и угол между ними определяются по формулам:

$$\alpha_{m_1} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{12} \pm 90^\circ; \alpha_{m_2} = \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_{34} \pm 90^\circ; \quad (10)$$

$$\tau = (\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_{34}) - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{12}), \quad (11)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — дирекционные углы лучей визирования с определяемой точки на исходный пункт;  $\alpha_{12}, \alpha_{34}$  — дирекционные углы опорных сторон.

Согласно [3], погрешности положения

$$m_1 = \frac{S_1 S_2 m_{\beta_1}}{b_{12} \rho}; m_2 = \frac{S_3 S_4 m_{\beta_2}}{b_{34} \rho}; \quad (12)$$

где  $S_i$  — длины визирных лучей ( $i=1, 2, 3, 4$ );  $b_{12}, b_{34}$  — длины опорных сторон;  $m_{\beta_1}, m_{\beta_2}$  — средние квадратические погрешности измерения углов. Тогда при  $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_\beta$  формула (9) будет иметь вид

$$M_p = \frac{m_\beta}{\rho \sin \tau} \sqrt{\left(\frac{S_1 S_2}{b_{12}}\right)^2 + \left(\frac{S_3 S_4}{b_{34}}\right)^2}, \quad (13)$$

напоминающий известную формулу для погрешности точки в задаче Потенота. Из формулы (13) следует, что при  $\tau \approx 0^\circ$  или  $180^\circ$  погрешность  $M_p$  велика, причем в первом случае точки  $p$  и  $p'$  расположатся далеко друг от друга, а во втором — весьма близко, что следует учитывать при вычислении координат пунктов.

Для вычисления погрешностей  $M_p$  построена номограмма (рис. 2), при этом формула (13) преобразована:

$$M_p = m_\beta'' \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad (14)$$

где

$$F_1 = \frac{S_1 S_2}{\rho' b_{12} \sin \tau}, F_2 = \frac{S_3 S_4}{\rho'' b_{34} \sin \tau}. \quad (15)$$

Определив графически по схеме засечки  $s_1, s_2, s_3, s_4, b_{12}$  и  $b_{34}$  (в км), а также  $\tau$  (в град), по номограмме найдем погрешность положения определяемого пункта (в см). Например, при  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$  км,  $b_{12} = b_{34} = 4$  км,  $\tau = 60^\circ$  и  $m_\beta = 5''$  получим  $M_p = 8,9$  см.

Приведенное решение справедливо и для задачи Потенота, которая является частным случаем рассматриваемой засечки при совпадении второго и третьего исходных пунктов. В этом случае решение дает не только координаты определяемого пункта, но и второго исходного, следовательно, в ходе решения осуществляется и контроль вычислений. Кроме того, по номограмме (рис. 2) можно найти погрешность положения пункта, определяемого задачей Потенота.

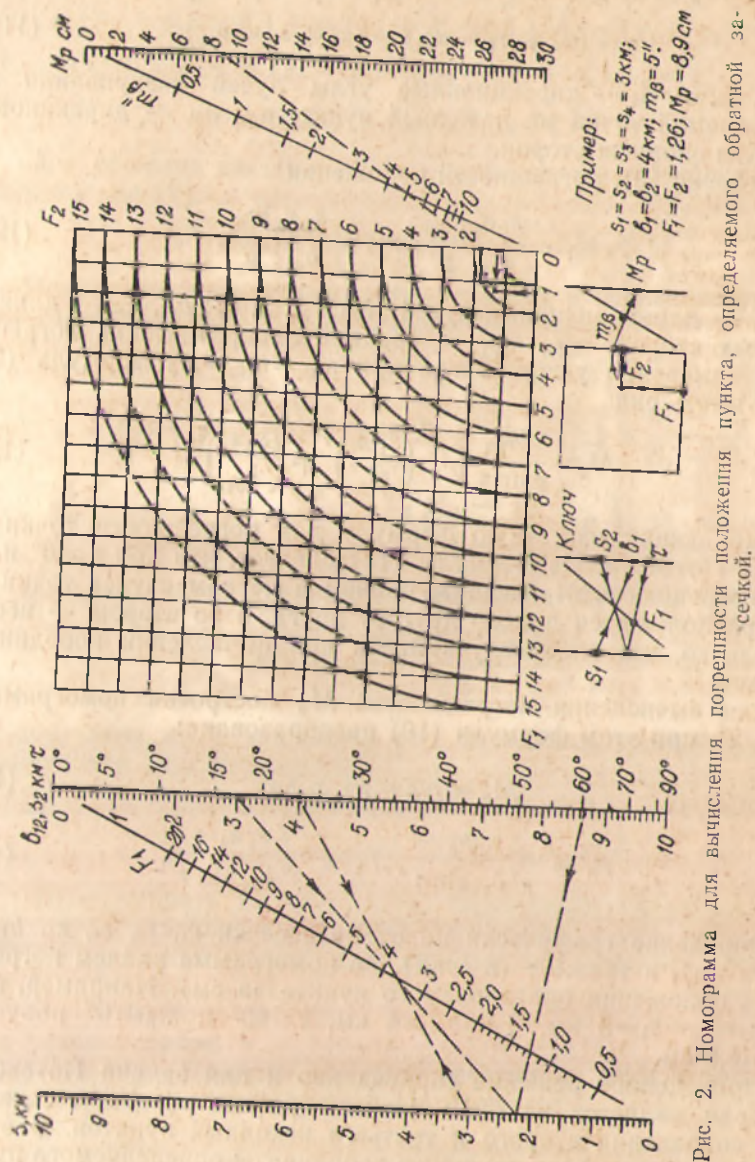


Рис. 2. Номограмма для вычисления погрешности положения пункта, определяемого обратной засечкой.

Список литературы: 1. Климович В. А. Вычисление координат точки, определенной по двум несмежным углам, измеренным между четырьмя опорными пунктами. — Записки по гидрографии, 1945, № 2. 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1973. 3. Келль П. Г. Избр. тр. — М.: Недра, 1964.

Статья поступила 15 апреля 1980 г.

УДК 628.48

А. В. ГОЖИИ

### ЗАМЕЧАНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРЕШНОСТИ ВЫНОСА ТОЧКИ НА МЕСТНОСТЬ СПОСОБОМ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В справочниках [4, 5, 6] и некоторых других пособиях (например, в работах [2, 3]) для определения средней квадратической погрешности  $m_D$  выноса точки  $D$  на местность относительно опорных точек  $A$  и  $B$  (рисунок) способом прямоугольных координат рекомендуется применять формулу такого вида:

$$m_D^2 = m_{\Delta x}^2 + m_{\Delta y}^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \Delta y^2, \quad (1)^*$$

где  $m_{\Delta x}$  и  $m_{\Delta y}$  — средние квадратические погрешности отложения расстояний  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вдоль направлений линий  $AB$  и  $CD$ ;  $m_\beta$  — погрешность построения перпендикуляра  $CD$  к линии  $AB$  (погрешность построения угла  $\beta$ );  $\rho$  — коэффициент перехода от градусной меры углов к радианной.

Однако детальный анализ этой формулы показывает, что она нуждается в уточнении. Как известно, погрешность  $m_D$  следует рассматривать как сумму погрешности  $m_{C,A}$  (выноса точки  $C$  относительно точки  $A$ ) и погрешности  $m_{D,C}$  (выноса точки  $D$  относительно точки  $C$ ), т. е.

$$m_D^2 = m_{C,A}^2 + m_{D,C}^2. \quad (2)$$

Поскольку вынос точки  $D$  относительно точки  $C$  осуществляется способом полярных координат (отложение полярного угла  $\beta = 90^\circ$  и расстояния  $\Delta y$  вдоль полученного направления), то

$$m_{D,C}^2 = m_{\Delta y}^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \Delta y^2. \quad (3)$$

Вынос точки  $C$  относительно точки  $A$  производится способом створных измерений, являющимся частным случаем того же

\* Чтобы упростить рассмотрение вопроса, здесь опущены погрешности определения опорных точек, погрешности фиксирования точек, центрирования инструментов, редукций визирных целей и т. п.