ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.236

А. В. БУТКЕВИЧ, В. Г. КИРИЛЛОВ

О ВОЗМОЖНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ В СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИИ

Наличие в различных странах разных систем пространственных прямоугольных координат требует их преобразования в единую систему. Суть задачи можно сформулировать так: даны пространственные прямоугольные координаты нескольких общих пунктов в одной (X_i, Y_i, Z_i) и во второй (X_i', Y_i', Z_i') системах, необходимо установить вид преобразования, определить его параметры, преобразовать координаты остальных пунктов и выполнить оценку точности преобразования.

В общем случае формулы преобразования координат можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = A \cdot M \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где A — матрица вращения; M — матрица масштабных изменений; δX_0, δY_0, δZ_0 — сдвиги по осям координат.

Ряд авторов (6), (9) считают возможными аффинные преобразования пространственных координат не только в фотограмметрии, но и в спутниковой геодезии. Проанализируем это утверждение.

Формулы аффинного преобразования имеют вид [4]

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{XX'} & \cos\varphi_{YX'} & \cos\varphi_{ZX'} \\ \cos\varphi_{XY'} & \cos\varphi_{YY'} & \cos\varphi_{ZY'} \\ \cos\varphi_{XZ'} & \cos\varphi_{YZ'} & \cos\varphi_{ZZ'} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $m_X \neq m_Y \neq m_Z$ — линейные масштабы по осям координат.

Если матрица A ортогональная, т. е. ее элементы удовлетворяют шести условиям ортогональности [4]:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\cos^2\varphi_{XX'} + \cos^2\varphi_{YX'} + \cos^2\varphi_{ZX'} = 1;\\
&\cos^2\varphi_{XY'} + \cos^2\varphi_{YY'} + \cos^2\varphi_{ZY'} = 1;\\
&\cos^2\varphi_{XZ'} + \cos^2\varphi_{YZ'} + \cos^2\varphi_{ZZ'} = 1;\\
&\cos\varphi_{XX'}\cos\varphi_{YX'} + \cos\varphi_{XY'}\cos\varphi_{YY'} + \cos\varphi_{XZ'}\cos\varphi_{YZ'} = 0;\\
&\cos\varphi_{XX'}\cos\varphi_{ZX'} + \cos\varphi_{XY'}\cos\varphi_{ZY'} + \cos\varphi_{XZ'}\cos\varphi_{ZZ'} = 0;\\
&\cos\varphi_{YX'}\cos\varphi_{ZX'} + \cos\varphi_{YY'}\cos\varphi_{ZY'} + \cos\varphi_{YZ'}\cos\varphi_{ZZ'} = 0,
\end{aligned}
\right\}
\quad (3)
$$

то такое преобразование называют ортогональным аффинным [4]; оно сохраняет прямые углы между осями X, Y, Z. Если же элементы матрицы A не удовлетворяют условиям (3), то афинное преобразование переводит прямоугольную систему в непрямоугольную. Докажем это.

Легко показать, что косинусы углов между осями координат в новой системе выражаются так:

$$
\cos\alpha_{X'O'Y'} = \frac{\cos\varphi_{XX'}\cos\varphi_{YX'} + \cos\varphi_{XY'}\cos\varphi_{YY'} + \cos\varphi_{XZ'}\cos\varphi_{YZ'}}{\sqrt{\cos\varphi_{XX'} + \cos^2\varphi_{XY'} + \cos^2\varphi_{XZ'}} \times \sqrt{\cos^2\varphi_{YX'} + \cos^2\varphi_{YY'} + \cos^2\varphi_{YX'}}}; \quad (4)
$$

$$
\cos\alpha_{X'O'Z'} = \frac{\cos\varphi_{XX'}\cos\varphi_{ZX'} + \cos\varphi_{XY'}\cos\varphi_{ZY'} + \cos\varphi_{XZ'}\cos\varphi_{ZZ'}}{\sqrt{\cos^2\varphi_{XX'} + \cos^2\varphi_{XY'} + \cos^2\varphi_{XZ'}} \times \sqrt{\cos^2\varphi_{ZX'} + \cos^2\varphi_{ZY'} + \cos^2\varphi_{ZZ'}}}; \quad (5)
$$

$$
\cos\alpha_{Y'O'Z'} = \frac{\cos\varphi_{YX'}\cos\varphi_{ZX'} + \cos\varphi_{YY'}\cos\varphi_{ZY'} + \cos\varphi_{YZ'}\cos\varphi_{ZZ'}}{\sqrt{\cos^2\varphi_{YX'} + \cos^2\varphi_{YY'} + \cos^2\varphi_{YZ'}} \times \sqrt{\cos^2\varphi_{ZX'} + \cos^2\varphi_{ZY'} + \cos^2\varphi_{ZZ'}}}. \quad (6)
$$

Из этих формул видно, что если матрица вращения A ортогональная, т. е. ее элементы удовлетворяют условиям (3), то числители формул (4)—(6) равны нулю, углы между осями прямые и в преобразованной системе будет соблюдаться ортогональность координатных осей. Поскольку в спутниковой геодезии применяют исключительно прямоугольные системы, а не косоугольные, то применение аффинных формул (2) с неортогональной матрицей преобразования A для трансформирования таких координат в геодезии нежелательно, так как ортогональное аффинное преобразование переводит декартову * прямоугольную систему координат также в прямоугольную, но уже не декартову.

* Декартовой называется система координат, имеющая одинаковые по величине орты [4].

Если в формуле (2) $m_X = m_Y = m_Z = m$, а матрица A — ортогональная, то преобразование называется подобным или линейным конформным. При преобразовании подобия пространственные углы отображаются без искажений, а преобразованные орты i_X', i_Y', i_Z' равны между собой по абсолютному значению. Поэтому оно переводит декартову систему координат также в декартову.

Согласно теореме Лиувилля, конформными в пространстве будут такие преобразования, которые переводят сферы в сферы [3]. Группа таких сферических преобразований включает сдвиги, повороты, гомотетию *, инверсию и суперпозиции этих преобразований.

Расположение шести точек на осях координат.

Отметим, что инверсию для преобразования пространственных систем координат применять также не следует, поскольку при этом в общем случае прямые переходят в окружности, т. е. прямолинейные оси координат в одной системе преобразуются в дуги больших кругов в другой системе. Но в спутниковой геодезии координатные оси пространственных прямоугольных систем задаются прямыми. Следовательно, возможными конформными преобразованиями пространственных прямоугольных декартовых систем координат будут сдвиги, повороты, гомотетии и их произведения.

В ряде работ [5], [8] для нелинейного «конформного» преобразования пространственных прямоугольных координат получены полиномы II степени вида:

$$\left.\begin{aligned} X' &= a_0 + a_1 X + b_1 Y - c_1 Z + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ &\quad + 2b_2 XY + 2c_2 XZ; \\ Y' &= b_0 - b_1 X + a_1 Y + d_1 Z + b_2 (-X^2 + Y^2 - Z^2) + \\ &\quad + 2a_2 XY + 2c_2 YZ; \\ Z' &= c_0 + c_1 X - d_1 Y + a_1 Z + c_2 (-X^2 - Y^2 + Z^2) + \\ &\quad + 2a_2 XZ + 2b_2 YZ. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Они удовлетворяют условиям Коши—Римана в пространстве и сохраняют проекции пространственных углов на координатные плоскости. Применение таких «конформных» полиномов предложено в геодезии и фотограмметрии [5, 8].

Однако эти полиномы не являются полиномами конформных преобразований. Это установил З. Ситек в 1967 г. [10], ко-

* Гомотетией называется равномерное растяжение (сжатие).

торый упрощенно показал, что в трехмерном пространстве невозможно получить полиномы II степени для конформного преобразования. Действительно, полиномы (7) не удовлетворяют предложенным в 1925 г. условиям конформности Хедрика-Инголда [7]:

$$\left.\begin{aligned}
&X'_X = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Y'_Y & Y'_Z \\ Z'_Y & Z'_Z \end{vmatrix}, \quad X'_Y = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Z'_X & Z'_Z \\ Y'_X & Y'_Z \end{vmatrix}, \\
&\qquad X'_Z = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Y'_X & Y'_Y \\ Z'_X & Z'_Y \end{vmatrix}; \\
&Y'_X = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Z'_Y & Z'_Z \\ X'_Y & X'_Y \end{vmatrix}, \quad Y'_Y = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} X'_X & X'_Z \\ Z'_X & Z'_Z \end{vmatrix}, \\
&\qquad Y'_Z = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Z'_X & Z'_Y \\ X'_X & X'_Y \end{vmatrix}; \\
&Z'_X = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} X'_Y & X'_Z \\ Y'_Y & Y'_Z \end{vmatrix}, \quad Z'_Y = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} Y'_X & Y'_Z \\ X'_X & X'_Z \end{vmatrix}, \\
&\qquad Z'_Z = \frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix} X'_X & X'_Y \\ Y'_X & Y'_Y \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $E = (X'_X)^2 + (X'_Y)^2 + (X'_Z)^2$.

Если рассматривать 6 точек, попарно расположенных на осях координат, то легко показать, что при выполнении преобразования по формулам (7) средние масштабы по осям координат

$$\left.\begin{aligned}
m_X &= a_1 + a_2 (X_1 + X_2); \\
m_Y &= a_1 + b_2 (Y_3 + Y_4); \\
m_Z &= a_1 + c_2 (Z_5 + Z_6)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

не будут равны между собой. Здесь X_1, X_2, Y_3, Y_4, Z_5, Z_6 — координаты любых шести точек, лежащих попарно на осях координат (рисунок).

Формулы (9) показывают, что при таком преобразовании (7) масштабы по осям координат не постоянны и зависят от координат точек. Следовательно, формулы (7) переводят декартову систему в недекартову с переменными масштабами по осям. Поэтому применение формул (7) для трансформирования пространственных прямоугольных декартовых систем координат в спутниковой геодезии также нецелесообразно.

Таким образом, допустимыми видами преобразования пространственных прямоугольных декартовых систем в геодезии являются преобразования подобия (линейные конформные) и ортогональные. При таких преобразованиях выполняются сдвиги, повороты и гомотетия (в частности, при ортогональном преобразовании $m=1$). Однако при наличии ошибок в координатах пунктов в новых и старых системах координат для лучшего согласования систем возможно применение и других видов преобразования, например, аффинного. Но оно является характерным не в спутниковой геодезии, а в фотограмметрии.

Определение вида преобразования удобно выполнять по методу, предложенному в работе [1].

Список литературы: 1. *Буткевич А. В., Кириллов В. Г.* Определение вида линейного трансформирования пространственных прямоугольных координат. — Геодезия и картография, 1978, № 4. 2. *Изотов А. А. и др.* Основы спутниковой геодезии. — М.: Недра, 1974. 3. *Каган В. Ф.* Теория поверхностей в тензорном изложении. — М.: Гостехиздат, 1948, ч. 2. 4. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965. 5. *Baetsle P. L.* Conformal transformation in three dimensions. — Photogrammetric Engineering, 1966, N 5. 6. *Czarnecki A.* Transformacja przestrzenia w pewnych zadaniach geodezji satelitarnej. — Geodezja i kartografia, 1972, N 2. 7. *Hedrieck P. L., Ingold L.* Analytic sanctions in three dimensions. — Trans. of Amer. Math. Soc., 1925, vol. 27. 8. *Michail E.* Simultaneons three dimensional transformation of nigher degrees. — Photogrammetric Engineering, 1964, N 4. 9. *Rysz J.* Transformacja wspólrzednych w przestrzeniach dowolnie wymiarowych. — Geodezja i kartografia, 1972, N 4. 10. *Sitek Z.* Analitycznie wyrownanie aerotrianqulacji za pomoca wielomianow. — Przegled geodezyiny, 1967, N 9.

Работа поступила в редколлегию 8 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Новополоцкого политехнического института.