

А. В. БУТКЕВИЧ, Н. Н. ЯКОВИНИЧ

**О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
С ПОМОЩЬЮ I ПРОЕКЦИИ ГАУССА ЭЛЛИПСОИДА
НА ШАРЕ СО СРЕДНЕЙ НОРМАЛЬНОЙ ШИРОТОЙ**

Авторы исследовали неосвещенный в литературе вариант Гауссова конформного изображения эллипсоида на шаре для получения простой проекции, удобной для ручного и машинного решения различных задач высшей и морской геодезии, с малыми искажениями азимутов и расстояний, которыми в ряде случаев можно пренебречь.

В 1822 г. К. Ф. Гаусс разработал общую теорию конформного изображения одной поверхности на другой, в частности эллипсоида на шаре, и применил ее для решения главных геодезических задач.

В I проекции Гаусса (1822) сохраняется равенство долгот на эллипсоиде и на шаре, т. е. $\alpha = \frac{d\lambda}{dl} = 1$, и основные формулы имеют вид [2]

$$\lambda = l; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{k_0} \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^{e/2} = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) \frac{U}{U_0}. \tag{2}$$

При этом

$$\varphi_0 = B_0; \bar{R} = N_0; k_0 = \frac{U_0}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B_0}{2}\right)}; \tag{3}$$

$$\lg m = \frac{\mu\eta^2 \Delta\varphi^2}{2} - \frac{\mu\eta^2 \operatorname{tg} B_0 V^3 \Delta\varphi^3}{2} + \dots; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (\lg m)_{\text{cp}} &= \frac{1}{6} (\lg m_1 + 4 \lg m_m + \lg m_2) = \\ &= \frac{\mu\eta^2 \Delta\varphi^2}{6} - \frac{\mu e^2 \sin 2\varphi_0 V^3 \Delta\varphi^3}{16} + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Гаусс рекомендовал для изображения эллипсоида на шаре и решения геодезических задач свою II проекцию (1844), в ко-

торой линейные искажения не II порядка (как в I проекции), а III, однако формулы в ней гораздо сложнее.

I проекция Гаусса привлекает внимание своей простотой, а возможности ее использования, как будет показано далее, далеко не исчерпаны. Для решения геодезических задач ее применяли А. Беррот в 1922 г. [4] и Г. В. Багратуни в 1949 г. в неявном виде [3]. При этом А. Беррот использовал для решения прямой геодезической задачи конформный шар с радиусом $R=N_1$, для которого $\varphi_0=B_0=B_1$ и $\lambda=l$, т. е. проводил нормальную параллель через начальный пункт с широтой B_1 , причем вводил в полученные сферические азимуты α_{12} и α_{21} поправки [4]:

$$\psi_1 = \frac{S^2 \eta^2 \sin 2A_1 \rho''}{12N_1^2} - \frac{S^3 \eta^3 \sin A_1 \operatorname{tg} B_1 \rho''}{24N_1^3} = \Delta_1 - \Delta_2; \quad (6)$$

$$A_{12} = \alpha_{12} - \psi_1; \quad (7)$$

$$\psi_2 = \frac{S^2 \eta^2 \sin 2A_1 \rho''}{6N_1^2} + \frac{S^3 \eta^3 \sin A_1 \operatorname{tg} B_1 \rho''}{8N_1^3} = 2\Delta_1 + 3\Delta_2 \approx 2\psi_1; \quad (8)$$

$$A_{21} = \alpha_{21} + 2\psi_1, \quad (9)$$

полностью совпадающие с поправками за переход от азимутов геодезической линии на эллипсоиде к прямому и обратному азимутам прямого нормального сечения. В работе [1] показано, что в этом случае изображение геодезической линии на шаре имеет такие же азимуты, как и прямое нормальное сечение на эллипсоиде.

Чтобы решить обратную геодезическую задачу, он проводил нормальную параллель через точку со средней широтой $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, а для исключения поправок в азимуты и расстояния, полученные на шаре, исправлял сферические широты и разность долгот с помощью весьма сложных формул [2, 4]. Поэтому его способ решения обратной задачи не нашел практического применения.

В 1949 г. Г. В. Багратуни [3] предложил решать прямые и обратные геодезические задачи при помощи перспективного изображения эллипсоида на «сфере нормалей», принимая и для прямой, и для обратной задач $R=N_1$, $\varphi_1=B_1$ и используя для передачи координат прямое нормальное сечение. В работе [1] доказано, что это практически соответствует (при $B_0 > 45^\circ$ и $B > 50^\circ$ с расхождениями в широтах и азимутах меньше $0,01''$) решению задач с помощью I проекции Гаусса с нормальной широтой B_0 , равной широте нормального пункта B_1 . Следовательно, формулы способов Гаусса и Багратуни эквивалентны и могут служить для взаимного контроля.

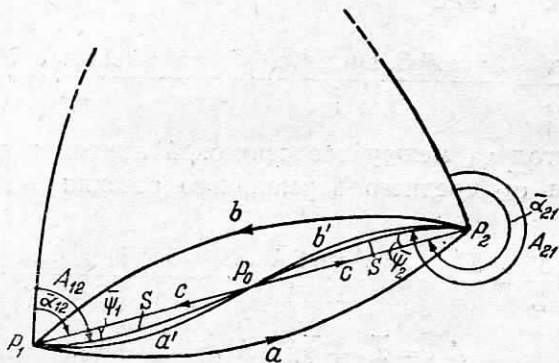
Формула Г. Багратуни для B_2' имеет вид [3]

$$\operatorname{tg} B_2' = \operatorname{tg} B_2 \left(1 - e^2 + \frac{e^2 V_2 \sin B_1}{V_1 \sin B_2} \right), \quad (10)$$

а поправки азимутов ψ_1 и ψ_2 и расстояний δS совпадают с поправками за переход от азимутов и длины S_0 дуги прямого нормального сечения к геодезической линии S , причем [1]

$$\delta S = S - S_0 = \frac{S^3 \eta \cos^2 A_1}{6N_1^2} - \frac{S^4 \eta^2 \cos A_1 \operatorname{tg} B_1}{8N_1^3}. \quad (11)$$

Чтобы сохранить простоту решения, но уменьшить поправки азимутов и расстояний, например для целей морской геодезии и геодезии, целесообразно применять I проекцию Гаусса со средней нормальной широтой, что в 1978 г. предложил



Расположение нормальных сечений и геодезической линии в I проекции Гаусса со средней нормальной широтой.

проф. А. В. Буткевич. При этом в ряде случаев поправки будут пренебрегаемо малы.

Вывод редуционных формул. Получим необходимые редуционные формулы для поправок азимутов и расстояний в I проекции Гаусса со средней нормальной широтой. На рисунке $a = P_1 \bar{a} P_2$ и $b = P_2 \bar{b} P_1$ — взаимные прямое и обратное нормальные сечения, проведенные в конечных пунктах P_1 и P_2 геодезической линии S ; Δ — угол между ними; α_{12} и α_{21} — прямой и обратный азимуты среднего нормального сечения, проведенного в средней точке P_0 геодезической линии S на пункты P_1 и P_2 ; A_{12} и A_{21} — азимуты геодезической линии; ψ_1 и ψ_2 — поправки в азимуты среднего нормального сечения за переход к геодезической линии; α_{21} и α_{12} — прямой и обратный азимуты прямого нормального сечения.

В книге Ф. Н. Красовского [2] доказывается, что точка B_0 практически (с погрешностью в доли миллиметра) находится на одинаковых расстояниях от прямого a и обратного b нормальных сечений (если азимут геодезической линии не близок к 90°). Среднее нормальное сечение, проведенное через точку P_0 на P_1 и P_2 , делит угол Δ между нормальными сечениями

пополам, т. е. образует с сечениями a и b в точках P_1 и P_2 углы $\frac{\Delta}{2}$ [2]. Если же провести прямые нормальные сечения «второго порядка» из пунктов P_1 и P_2 на P_0 , то они образуют с обратными сечениями «второго порядка» (т. е. со средним нормальным сечением) углы $\frac{\Delta}{4}$.

Как известно [2], при азимутах, не близких к 90° , угол δ_{12} между геодезической линией и прямым нормальным сечением стремится к $\frac{\Delta}{3}$, или

$$\delta_{12}^* = \psi_1^* = \frac{\Delta}{3} = \frac{S^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_1 e'^2 \rho''}{12N_1^2} - \frac{S^3 \eta_1^2 \sin A_1 \operatorname{tg} B_1 \rho''}{24N_1^3} + \dots \quad (12)$$

Поэтому угол $\bar{\psi}_1$ между геодезической линией и прямым направлением $\bar{\alpha}_{12}$ среднего нормального сечения s в начальной точке P_1

$$\bar{\psi}'' = \frac{\Delta''}{2} - \frac{\Delta''}{3} = \frac{\Delta''}{6} = \frac{S^2 \eta^2 \sin 2A_{12} \rho''}{24N_1^2} - \frac{S^3 \eta_1^2 \sin A_{12} \operatorname{tg} B_1 \rho''}{48N_1^3} + \dots \quad (13)$$

Очевидно, $A_{12} = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\psi}_1$; $A_{21} = \bar{\alpha}_{21} + \bar{\psi}_2$. (14)

Исходя из свойств среднего нормального сечения, с достаточной точностью можно считать $\psi_2 = \bar{\psi}_1$.

Таким образом, по сравнению с I проекцией Гаусса с начальной нормальной широтой (А. Беррот, Г. Багратуни) поправки в азимуты $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ здесь получаются: а) в два раза меньше, чем при $B_0 = B_1$; б) одинаковыми по знаку и значению, что весьма упрощает их вычисление и уменьшает искажения азимутов.

Для определения линейных искажений найдем логарифмы средних масштабов длин для отрезков $\overline{P_0 P_1}$ и $\overline{P_0 P_2}$ по формуле (5): для $\overline{P_0 P_1}$

$$\lg m_{01}^m = \frac{\mu \eta^2 \Delta \Phi^2}{24\rho^2} - \frac{\mu \eta^2 \operatorname{tg} B \Delta \Phi^3}{64\rho^3}, \quad (15)$$

для $\overline{P_0 P_2}$

$$\lg m_{02}^m = \frac{\mu \eta^2 \Delta \Phi^2}{24\rho^2} + \frac{\mu \eta^2 \operatorname{tg} B \Delta \Phi^3}{64\rho^3}, \quad (16)$$

где

$$\Delta \Phi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Поэтому, взяв среднее из этих выражений, для линии $P_1 P_2$ получим

$$\lg m_m = \frac{\mu \eta^2 \Delta \Phi^2}{24\rho^2}, \quad (17)$$

т. е. в четыре раза меньше, чем у А. Беррота и Г. В. Багратуни. Редуцирование расстояний здесь удобно выполнять по формуле

$$\lg S = \lg \frac{\sigma'' N_m}{\rho''} - \lg m_m = \lg S_0 - \lg m_m. \quad (18)$$

Значения $\lg m_m$ легко табулировать по B_0 и $\Delta\varphi \cong \Delta B$ (см. табл.).

Таблица значений $\lg m_m$ (в единицах 7-го знака)

B_0	ΔB									
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
35°	0	1	3	5	8	12	16	20	26	32
40°	0	1	3	4	7	10	14	18	23	28
45°	0	1	2	4	6	9	12	15	19	24
50°	0	1	2	3	5	7	10	13	16	20
55°	0	1	1	3	4	6	8	10	13	16
60°	0	0	1	2	3	4	6	8	10	12
65°	0	0	1	1	2	3	4	6	7	9
70°	0	0	1	1	1	2	3	4	5	6

Решение обратной геодезической задачи. Экспериментальное решение обратной геодезической задачи (при $S=392$ км) выполняли с помощью формул:

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) = \frac{U_1}{U_m} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{B_m}{2} \right); \quad (2')$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1; \quad \varphi_m = \varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_m = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \cos \varphi_m}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}; \quad (20) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin \varphi_m}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}; \quad (21)$$

$$\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_m - \frac{\Delta\alpha}{2}; \quad \bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_m + \frac{\Delta\alpha}{2}; \quad (22)$$

$$A_{12} = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\psi}_1; \quad A_{21} = \bar{\alpha}_{21} + \bar{\psi}_2; \quad (14')$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{\Delta\alpha}{2}}{\cos \bar{\alpha}_m} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_m \sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\sin \bar{\alpha}_m}; \quad (23)$$

$$\lg S = \lg \frac{\sigma'' N_m}{\rho''} - \lg m_m. \quad (18')$$

При отсутствии таблиц $\lg U$ для повышения точности и для контроля можно применять и другие формулы:

$$\varphi_m = B_m + \frac{d^2 \varphi}{dB^2} \cdot \frac{\Delta B}{8\rho''} = B_m + \frac{3e^{12} \sin 2B_m \Delta B''^2}{16V_m''} + \dots; \quad (24)$$

$$\Delta\varphi'' = \frac{(X_2 - X_1) m_m \rho''}{N_m} \cdot \frac{\Delta B}{V_m''}. \quad (25)$$

Исходные данные для решения: $B_1 = 50^\circ 40' 00''$, 000 ; $B_2 = 53^\circ 10' 00''$, 000 ; $l = 4^\circ 00' 00''$, 000 взяты из работы [1].

Сравнение с результатами точного решения обратной геодезической задачи на эллипсоиде в [1] дало следующие расхождения:

$\bar{\alpha}_{12}$	43°08'03",486	$\bar{\alpha}_{21}$	226°17'02",391	lgS'	5.59239931
A_{12}	03",566	A_{21}	02",472	lgS	5.59239922
$\bar{\psi}_1$	-0",08	$\bar{\psi}_2$	-0",082	$\delta \lg S$	+9

Вычисление поправок азимутов и расстояний:

$\bar{\alpha}_{12}$	43°08'	lg $\frac{e'^2}{24\rho''}$	1.134	lg $\frac{e'^2}{48\rho''^2}$	5.519	lg $\frac{e'^2}{24\rho''^2}$	5.820
φ_m	51°55'	lg $\cos^2 B_m$	9.580	lg $\cos^2 B_m$	9.580	lg $\mu \cdot 10^8$	7.638
$2\alpha_{12}$	86°16'	lg $\sin 2\alpha_{12}$	9.999	lg $\lg B_m$	0.106	lg $\cos^2 B_m$	9.580
lg σ''	4.101	lg σ''^2	8.202	lg $\sin \alpha^2$	9.835	lg $\Delta\varphi''^2$	7.908
I	0.082	lg I	8.915	lg σ''^3	12.304	lg $\lg m_m$	0.946
II	0.002	$\bar{\psi}_1$	0.080	lg II	7.344	lg m_m	9

Следовательно, редуцированные формулы получены верно.

Таким образом, при решении обратных геодезических задач и засечек на средние расстояния (до 500...600 км) в геодезии и морской геодезии удобно применять I проекцию Гаусса эллипсоида на шаре со средней нормальной широтой $B_0 = B_m$. При этом поправки азимутов ψ_1 и ψ_2 равны между собой по значению и по знаку и в два раза меньше, чем у А. Беррота и Г. Багратуни (т. е. при $B_0 = B_1$). В этом случае поправки расстояний уменьшаются в четыре раза (по сравнению со случаем $B_0 = B_1$) и при $S \leq 400$ км и $B_0 > 45^\circ$ не превышают 0,2 м и неощутимы для морской геодезии и геодезии.

При $B_0 > 45^\circ$ максимальные поправки азимутов меньше 0",01 при $S < 119$ км и $< 0",1$ при $S < 375$ км, а средний логарифм масштаба $\lg m_m < 1 \cdot 10^{-7}$ при $S < 258$ км и $< 5 \cdot 10^{-7}$ при $S < 578$ км. Значит, в геодезии поправками можно пренебрегать при $S < 250$...300 км и в морской геодезии — при $S < 500$...600 км.

Экспериментальное решение обратных геодезических задач и засечек с помощью этой проекции подтвердило простоту формул и малость искажений.

Для массового решения задач авторами составлена программа на языке Фортран для ЭВМ ЕС-1022.

Список литературы: 1. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сферондической геодезии. — М.: Недра, 1964. 2. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, ч. 2. — М.: Геодезиздат, 1942. 3. Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии. — 1-е изд. — М.: Геодезиздат, 1951. 4. Ходорович П. А. Решение главной задачи высшей геодезии методом свободного выбора положения нормальной параллели при конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара. — Омск, ОМСХИ, 1938.

Работа поступила в редколлегию 14 ноября 1979 года.

УДК 528.414

А. В. ГОЖИИ

К ВЫЧИСЛЕНИЮ УГЛОВОЙ НЕВЯЗКИ В РАЗОМКНУТОМ ТЕОДОЛИТНОМ ХОДЕ

В настоящее время для вычисления угловой невязки f_{β} в разомкнутом теодолитном ходе используют несколько разновидностей формул. Из них наиболее часто встречаются следующие [2, 4—6, 9]:

$$f_{\beta} = \sum_1^n \beta_{\text{изм}} - (\alpha_n - \alpha_k + n \cdot 180^{\circ}) \quad (1)$$

(если в ходе измеряли правые по ходу лежащие горизонтальные углы β) и

$$f_{\beta} = \sum_1^n \beta_{\text{изм}} - (\alpha_k - \alpha_n + n \cdot 180^{\circ}) \quad (2)$$

(если в ходе измеряли левые углы β).

В формулах (1) и (2) $\sum_1^n \beta_{\text{изм}}$ — сумма всех измеренных углов хода вместе с примычными; α_n и α_k — дирекционные углы начальной и конечной опорных сторон хода соответственно; n — число всех измеренных углов, включая примычные.

Как правило, другие разновидности формул для вычисления f_{β} отличаются от (1) и (2) внешним видом или содержанием множителя перед 180° . Так, в работах [6, 7] при выводе формул для определения f_{β} через n обозначено число сторон хода, а множитель перед 180° — число углов соответственно через $n+1$. В формуле, приведенной в работе [1], множитель перед 180° — величина $n-1$ (n — число углов).

Практическое применение всех разновидностей формул для определения f_{β} свидетельствует, что ни одна из них не является идеальной, поскольку в ряде случаев вычисленные по соответ-