

способа полярных координат (отложение расстояния Δx вдоль направления AB , т. е. при полярном угле $\alpha=0^\circ$), и, стало быть,

$$m_{C,A}^2 = m_{\Delta x}^2 + \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \Delta x^2. \quad (4)$$

Таким образом, способ прямоугольных координат фактически сводится к двукратному применению способа полярных координат.

В формуле (4) погрешность m_α характеризует точность построения направления AC в створе линии AB . В свою очередь точность, с которой задан створ AB , зависит от погрешностей определения опорных точек A и B , погрешностей визирования, центрирования и т. п. В случае, когда построение направлений AC и CD выполняется одним и тем же инструментом, $m_\alpha = m_\beta$. Так как погрешности построения направлений вообще и створных в частности

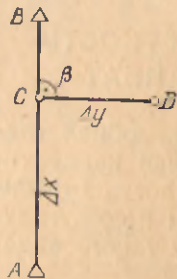


Схема выноса точки способом прямоугольных координат.

удобнее задавать в угловой, а не в линейной мере, то определение погрешности выноса точки на местность способом створных измерений на основе формулы (4) представляется более естественным, чем определение ее другими путями [1, 3].

С учетом сказанного получается, что формула для вычисления погрешности m_D должна выглядеть так:

$$m_D^2 = m_{\Delta x}^2 + \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \Delta x^2 + m_{\Delta y}^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \Delta y^2. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что при определении погрешности выноса точки на местность способом прямоугольных координат необходимо учитывать погрешность построения в заданном створе направления линии, в конце которой строится перпендикуляр, проходящий через выносимую точку, поскольку построение направления в заданном створе, как и построение угла и отложение линии, не является безошибочным.

Список литературы: 1. Видуев Н. Г. и др. Геодезические разбивочные работы. — М.: Недра, 1973. 2. Закатов П. С. и др. Инженерная геодезия. — М.: Недра, 1976. 3. Левчук Г. П. Курс инженерной геодезии. — М.: Недра, 1970. 4. Справочник геодезиста. — М.: Недра, 1975. 5. Справочник по инженерной геодезии. — Киев: Вища школа, 1978. 6. Субботин И. Е., Мазникий А. С. Справочник строителя по инженерной геодезии. — Киев: Будівельник, 1972.

Статья поступила 5 февраля 1980 г.

УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ПОМОЩЬЮ ПОПРАВОК В НЕОБХОДИМЫЕ УГЛЫ

Для сокращения объема вычислений при уравнивании триангуляции 2, 3 и 4 классов рекомендуется применять параметрический способ уравнивания по углам [4]. Более значительного сокращения можно достигнуть, если применять этот спо-

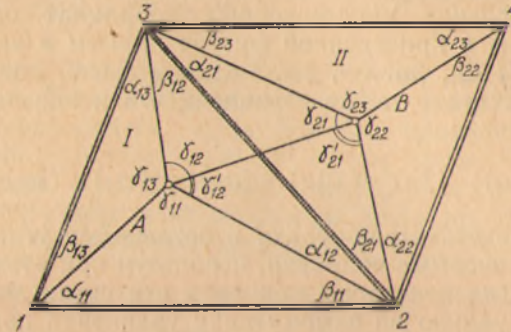


Схема триангуляционной сети.

соб уравнивания, используя необходимые поправки в измеренные величины и типовые уравнения поправок.

Рассмотрим этот прием уравнивания на типовой фигуре триангуляции, изображенной на рисунке. В данной сети измерено 20 углов. Два пункта A и B — определяемые. Составим уравнение поправок для всех измеренных углов.

Для центральной фигуры I :

$$(\alpha_{11})^0 = -a_{A1} \xi_A = b_{A1} \eta_A^+ l_1; \quad (\beta_{11})^0 = a_{A2} \xi_A + b_{A2} \eta_A + l_2;$$

$$(\gamma_{11})^0 = a_{A1} \xi_A + b_{A1} \eta_A - a_{A2} \xi_A - b_{A2} \eta_A + l_3;$$

$$(\alpha_{12})^0 = -a_{A2} \xi_A - b_{A2} \eta_A + l_4; \quad (\beta_{12})^0 = a_{A3} \xi_A + b_{A3} \eta_A + l_5;$$

$$(\gamma_{12})^0 = -a_{A2} \xi_A + b_{A2} \eta_A - a_{A3} \xi_A - b_{A3} \eta_A + l_6; \quad (1)$$

$$(\alpha_{13})^0 = -a_{A3} \xi_A - b_{A3} \eta_A + l_7; \quad (\beta_{13})^0 = a_{A1} \xi_A + b_{A1} \eta_A + l_8;$$

$$(\gamma_{13})^0 = a_{A3} \xi_A + b_{A3} \eta_A - a_{A1} \xi_A - b_{A1} \eta_A + l_9;$$

$$(\gamma'_{12})^0 = a_{A2} \xi_A + b_{A2} \eta_A - a_{AB} \xi_A - b_{AB} \eta_A - a_{BA} \xi_B - b_{BA} \eta_B + l_{10}.$$

Для центральной фигуры II :

$$(\alpha_{21})^0 = -a_{B3} \xi_B - b_{B3} \eta_B + l_{11}; \quad (\beta_{21})^0 = a_{B2} \xi_B + b_{B2} \eta_B + l_{12};$$

$$(\gamma_{21})^0 = a_{B3} \xi_B + b_{B3} \eta_B - a_{B2} \xi_B - b_{B2} \eta_B + l_{13};$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_{22})^0 &= -a_{B2} \xi_B - b_{B2} \eta_B + l_{14}; & (\beta_{22})^0 &= a_{B4} \xi_B + b_{B4} \eta_B + l_{15}; \\
(\gamma_{22})^0 &= a_{B2} \xi_B + b_{B2} \eta_B - a_{B4} \xi_B - b_{B4} \eta_B + l_{16}; & (2) \\
(\alpha_{23})^0 &= -a_{B4} \xi_B - b_{B4} \eta_B + l_{17}; & (\beta_{23})^0 &= a_{B3} \xi_B + b_{B3} \eta_B + l_{18}; \\
(\gamma_{23})^0 &= a_{B4} \xi_B + b_{B4} \eta_B - a_{B3} \xi_B - b_{B3} \eta_B + l_{19}; \\
(\gamma'_{21}) &= a_{BA} \xi_B + b_{BA} \eta_B + a_{AB} \xi_A + b_{AB} \eta_A - a_{B2} \xi_B - b_{B2} \eta_B + l_{20};
\end{aligned}$$

Здесь $(\alpha)^0$, $(\beta)^0$, $(\gamma)^0$ — поправки в измеренные углы; a и b — коэффициенты при поправках ξ и η в приближенные координаты, l_i — свободные члены уравнений поправок.

Для вычисления приближенных координат определяемых пунктов A и B в приведенной фигуре примем в качестве независимых углы α_{11} , β_{11} , α_{21} , β_{21} . Следовательно, поправки в эти углы будем считать также независимыми и обозначим их следующим образом:

$$(\alpha_{11})^0 = (\alpha_{11}); \quad (\beta_{11})^0 = (\beta_{11}); \quad (\alpha_{21})^0 = (\alpha_{21}); \quad (\beta_{21})^0 = (\beta_{21}).$$

Теперь представим поправки в оставшиеся углы через выбранные независимые поправки, используя при этом самые простые связи. Для некоторых поправок эти связи легко устанавливаются визуально по самому виду уравнений поправок и непосредственно по фигуре. Для центральной фигуры I :

$$\begin{aligned}
(\gamma_{11})^0 &= -(\alpha_{11}) - (\beta_{11}) + l_3; & (\alpha_{12})^0 &= -(\beta_{11}) + l_4; \\
(\beta_{12})^0 &= \frac{\sin \gamma_{12} \cdot \sin \beta_{11} \cdot \sin \beta_{12}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{11} \cdot \sin \alpha_{12}} (\alpha_{11}) + \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \cdot \sin \beta_{12}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{12}} (\beta_{11}) + l_5; \\
(\gamma_{12})^0 &= (\beta_{11}) - (\beta_{12}) + l_6; & (\alpha_{13})^0 &= -(\beta_{12}) + l_7; & (3) \\
(\beta_{13})^0 &= -(\alpha_{11}) + l_8; & (\gamma_{13})^0 &= (\beta_{12}) + (\alpha_{11}) + l_9; \\
(\gamma'_{12})^0 &= \frac{\sin \gamma'_{12} \cdot \sin \beta_{11} \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{11} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} (\alpha_{11}) + \\
&+ \left[1 - \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma'_{12}) \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} \right] (\beta_{11}) + \left[\frac{\sin \gamma'_{21} \cdot \sin (\gamma_{12} - \gamma'_{12})}{\sin \gamma'_{21} \cdot \sin (\alpha_{21} + \beta_{12})} (\alpha_{21}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin (\gamma_{21} - \gamma'_{21}) \cdot \sin \gamma'_{12}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} (\beta_{21}) + l_{10} \right].
\end{aligned}$$

Аналогичную систему уравнений поправок получим и для центральной фигуры II :

$$\begin{aligned}
(\gamma_{21})^0 &= -(\alpha_{21}) - (\beta_{21}) + l_{13}; & (\alpha_{22})^0 &= -(\beta_{21}) + l_{14}; \\
(\beta_{22})^0 &= \frac{\sin \gamma_{22} \cdot \sin \beta_{21} \cdot \sin \beta_{22}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{21} \cdot \sin \alpha_{22}} (\alpha_{21}) + \frac{\sin (\gamma_{21} + \gamma_{22}) \cdot \sin \beta_{22}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{22}} (\beta_{21}) + l_{15};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_{22})^0 &= (\beta_{21}) - (\beta_{22}) + l_{10}; & (\alpha_{23})^0 &= -(\beta_{22}) + l_{17}; \\
(\beta_{23})^0 &= -(\alpha_{21}) + l_{18}; & (\gamma_{23})^0 &= (\beta_{22}) + (\alpha_{21}) + l_{19}; & (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma'_{21})^0 &= \frac{\sin \gamma'_{12} \cdot \sin \beta_{11} \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{11} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} (\alpha_{11}) + \\
&+ \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma'_{12}) \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} (\beta_{11}) - \frac{\sin \gamma'_{21} \cdot \sin \gamma_{12} - \gamma'_{12}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin (\alpha_{21} + \beta_{12})} (\alpha_{21}) + \\
&+ \left[\frac{\sin (\gamma_{21} - \gamma'_{21}) \cdot \sin \gamma'_{12}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} - 1 \right] (\beta_{21}) + l_{20}.
\end{aligned}$$

Как видно из систем уравнений поправок (3), (4), самые сложные связи возникают для поправок в углы, которые не прилегают к независимым углам. Эти уравнения поправок назовем типовыми и составим их по общим правилам.

Применительно к центральным фигурам I и II для углов β_{12} , β_{22} , не прилегающих к независимым углам α_{11} , β_{11} и α_{21} , β_{21} , уравнения поправок вычислим по формуле

$$\begin{aligned}
(\beta_{K, n+1})^0 &= \frac{\sin \left(\sum_{i=2}^{n+1} \gamma_{Ki} \right) \prod_{j=1}^{n+1} \sin \beta_{Kj}}{\sin \gamma_{K1} \prod_{j=1}^{n+1} \sin \alpha_{Kj}} (\alpha_{K1}) + \\
&+ \frac{\sin \left(\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{Ki} \right) \cdot \prod_{j=2}^{n+1} \sin \beta_{Kj}}{\sin \gamma_{K1} \prod_{j=2}^{n+1} \sin \alpha_{Kj}} - (\beta_{K1}) + l_{K, n+1}, & (5)
\end{aligned}$$

где K — порядковый номер центральных систем, ($K=I, II, \dots$); n — порядковый номер типовых уравнений поправок, ($n=1, 2, 3, \dots$).

Формула (5) позволяет составить типовые уравнения поправок и для многолучевых жестких центральных систем.

Общая формула составления типовых уравнений поправок имеет вид для углов γ'_{K2} :

$$\begin{aligned}
(\gamma'_{K2})^0 &= \frac{\sin \gamma'_{K2} \cdot \sin \beta_{K1} \cdot \sin \gamma'_{K+1,1}}{\sin \gamma_{K1} \cdot \sin \alpha_{K1} \cdot \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} (\alpha_{K1}) + \\
&+ \left[1 - \frac{\sin (\gamma_{K1} + \gamma'_{K2}) \cdot \sin \gamma'_{K+1,1}}{\sin \gamma_{K1} \cdot \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} \right] (\beta_{K1}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin \gamma'_{K+1,1} \sin (\gamma_{K2} - \gamma'_{K2})}{\sin \gamma_{K+1,1} \sin (\alpha_{K+1,1} + \beta_{K2})} (\alpha_{K+1,1}) - \\
& - \frac{\sin (\gamma_{K+1,1} - \gamma'_{K+1,1}) \cdot \sin \gamma'_{K2}}{\sin \gamma_{K+1,1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} (\beta_{K+1,1}) + l_{K2}; \quad (6)
\end{aligned}$$

для углов $\gamma'_{K+1,1}$

$$\begin{aligned}
(\gamma'_{K+1,1})^0 &= \frac{\sin \gamma'_{K2} \sin \beta_{K1} \cdot \sin \gamma'_{K+1,1}}{\sin \gamma_{K1} \sin \alpha_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} (\alpha_{K1}) - \\
& - \frac{\sin (\gamma_{K1} + \gamma'_{K2}) \cdot \sin \gamma'_{K+1,1}}{\sin \gamma_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} (\beta_{K1}) - \\
& - \frac{\sin \gamma'_{K+1,1} \sin (\gamma'_{K2} - \gamma'_{K2})}{\sin \gamma_{K+1,1} \sin (\alpha_{K+1,1} + \beta_{K2})} (\alpha_{K+1,1}) + \\
& + \left[\frac{\sin (\gamma_{K+1,1} - \gamma'_{K+1,1}) \sin \gamma'_{K2}}{\sin \gamma_{K+1,1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1,1})} - 1 \right] (\beta_{K+1,1}) + l_{K+1,1}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Проанализировав формулы (6), (7), отмечаем, что, вычислив коэффициенты при независимых поправках, например по формуле (6), легко найти коэффициенты и по формуле (7).

Формулы (5), (6) и (7) получаем, решая первые два уравнения систем (1) и (2) относительно параметров ξ и η и подставляя их значения в искомые поправки.

Как видно из систем уравнений поправок (3), (4), на практике необходимо вычислить коэффициенты при независимых поправках только в трех типовых уравнениях, а остальные коэффициенты получаются просто и многие из них равны ± 1 . Заметим, что для вычисления коэффициентов можно не знать длины сторон треугольников, как при определении коэффициентов a и b в уравнениях поправок систем (1) и (2). В таком случае решают целый ряд треугольников, что в свою очередь требует длительного времени при уравнивании. В этом приеме уравнивания коэффициенты a и b не вычисляют. Кроме того, общие формулы составления типовых уравнений поправок и коэффициентов при неизвестных поправках можно без особого труда запрограммировать.

Свободные члены l_i уравнений поправок равны разности предварительных углов и измеренных. Так как углы α_{11} , β_{11} и α_{21} , β_{21} участвовали в вычислении предварительных координат определяемых пунктов, то $l_1 = l_2 = l_{11} = l_{12} = 0$.

Основные моменты при уравнивании подобных триангуляционных сетей представляют в такой последовательности:

1. По выбранным независимым углам вычисляют согласно формуле Юнга предварительные координаты определяемых пунктов.

2. По координатам определяют дирекционные углы всех сторон.

3. Подсчитывают коэффициенты при независимых поправках по рабочим формулам (3), (4).

4. Находят свободные члены для каждого уравнения поправок как $(A_{\Pi} - A_{\Pi}) - \alpha_i$, где $(A_{\Pi} - A_{\Pi})$ — разность дирекционных углов, сторон, образующих угол α_i , β_i , γ_i .

5. Составляют нормальные уравнения и, решая их по схеме Гаусса, находят независимые поправки.

6. Полученные значения независимых поправок подставляют в уравнения (3), (4) и получают остальные поправки.

7. Найденные поправки вводят в измеренные углы и по уранным углам вновь вычисляют по формулам Юнга уранные координаты определяемых пунктов.

8. По известным формулам производят контроль уравнивания и оценку точности положения определяемых пунктов.

Рассмотрим пример уравнивания фигуры, изображенной на рисунке. Исходные данные представленной сети взяты из работы [1].

Выполнив пункты 1, 2, 3, 4 указанной выше последовательности уравнивания, используя формулы (3), (4), составим для данной сети уравнения поправок в численном виде:

$$(1)^{\circ} = -(2) - (3) + 2,3;$$

$$(2)^{\circ} = (2);$$

$$(3)^{\circ} = (3);$$

$$(4)^{\circ} = 1,822(8) - 1,199(12) + 2,5;$$

$$(5)^{\circ} = -(8) + 1,5;$$

$$(6)^{\circ} = -0,822(8) + 1,199(12) - 2,8;$$

$$(7)^{\circ} = -(2) + 0,6;$$

$$(8)^{\circ} = (8);$$

$$(9)^{\circ} = +0,856(2) - 0,720(3) - 0,626(8) + 0,987(12) - 4,8;$$

$$(10)^{\circ} = +0,144(2) + 0,720(3) - 0,374(8) - 0,987(12) + 2,6;$$

$$(11)^{\circ} = +1,139(3) - 1,343(2) + 4,3;$$

$$(12)^{\circ} = (12);$$

$$(13)^{\circ} = -(8) - (12) + 1,7;$$

$$(14)^{\circ} = 2,343(2) - 1,139(3) - 7,5;$$

$$(15)^{\circ} = -(3) + 0;$$

$$(16)^{\circ} = 1,343(2) - 1,139(3) - 5,9;$$

$$(17)^{\circ} = -1,343(2) + 2,139(3) + 3,9;$$

$$(18)^{\circ} = 0,822(8) - 1,199(12) + 2,7;$$

$$(19)^{\circ} = -(12) + 2,6;$$

$$(20)^{\circ} = -0,828(8) + 2,199(12) - 1,8.$$

После выполнения п. 5 получают независимые поправки:

$$(2) = +2'',45; \quad (3) = -0'',75; \quad (8) = 0; \quad (12) = 1'',59.$$

Далее, подставляя эти значения в уравнения поправок, составленные в численном виде, находят остальные поправки:

$$\begin{aligned} (1)^\circ &= +0'',60; & (13)^\circ &= +0'',11; \\ (4)^\circ &= +0,59; & (14)^\circ &= -0,90; \\ (5)^\circ &= +1,50; & (15)^\circ &= +0,75; \\ (6)^\circ &= -0,89; & (16)^\circ &= -1,76; \\ (7)^\circ &= -1,85; & (17)^\circ &= -0,99; \\ (9)^\circ &= -0,59; & (18)^\circ &= +0,79; \\ (10)^\circ &= +0,84; & (19)^\circ &= +1,01; \\ (11)^\circ &= +0,15; & (20)^\circ &= +1,70. \end{aligned}$$

Выполнив п. 7, вычисляют координаты определяемых точек. Контроль уравнивания производят по формулам:

$$[L_n] = -[V_n S_n']; \quad [LL \cdot n] = [VV],$$

где S_n' — сумма коэффициентов нормального уравнения, подсчитываемая как разность $S_n - L_n = S_n'$, $[LL \cdot n] = [ll] + [V_n \times \times L_n]$; l — свободный член уравнения поправок; L_n — свободный член нормального уравнения; V_n — поправка независимого неизвестного, вычисляемая из решения схемы Гаусса:

$$\begin{aligned} [L_n] &= -23,9; & [VV] &= +32,8; \\ [V_n S_n'] &= 23,9; & [LL \cdot n] &= 33,0. \end{aligned}$$

Список литературы: 1. Гордеев А. В., Шарупич С. Г. Уравнивание типовых фигур триангуляции. — М.: Геозидиздат, 1956. 2. Монин И. Ф. О типовом условном уравнении в триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 3. Терпугов К. Н., Гордеев Ю. А. Уравнивание линейных триангуляций по методу условий с использованием типового условного уравнения и механических правил. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1961, вып. 4. 4. Судakov С. Г. Основные геодезические сети. — М.: Недра, 1975. 5. Прайс-Принцип И. Ю. Руководство по уравнивательным вычислениям триангуляции. — М.: Геозидиздат, 1956.

Статья поступила 9 апреля 1980 г.

УДК 550.312

Ю. П. ДЕЙНЕКА

О ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ ЗЕМЛИ

В 1975 г. интернациональная группа сейсмологов в составе А. Дзевонского (США), А. Хейлза (Австралия) и Е. Лэпвуда (Великобритания) предложила стандартную сферически-сим-

метричную модель Земли [12], необходимость введения которой неоднократно обсуждалась в литературе и более конкретно на XV Ассамблее МГГС. Однако, как пишет К. Е. Буллен [1], «окончательная цель построения моделей Земли состоит в получении зависимости δ и других физических параметров от трех пространственных координат r , θ и λ ». Таким образом, построение сферически-несимметричных моделей Земли связано с исследованием отклонений, представляющих собой тонкие детали строения, от сферической симметрии Земли.

Основные результаты исследований горизонтальных неоднородностей Земли получены с помощью сейсмической информации и данных о ее внешнем гравитационном поле.

Начало исследованиям подобного рода положил У. Каула. Используя спутниковые наблюдения, он в своих первых расчетах [13] определил максимальные вариации плотности земного вещества в коре ($0,02 \text{ г/см}^3$) и в верхней мантии ($6 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$). Позже У. Каула заключил [14], что горизонтальные неоднородности верхней мантии лежат в пределах $0,05 \dots 0,1 \text{ г/см}^3$.

Исследования Е. В. Швидерского [18], К. Р. Коха [15, 16], К. Р. Коха и Ф. Моррисона [17] базируются на представлении гравитационного поля Земли как потенциала простого слоя, распределенного на поверхности планеты. Для референц-эллипсоида со сжатием в состоянии гидростатического равновесия вычисленная [15] наибольшая разность плотностей $\Delta\delta$ в эквивалентном поверхностном слое толщиной 10 м составляет 260 г/см^3 , откуда в самом общем случае при толщине аномального слоя $H=10 \text{ км}$ $\Delta\delta=0,26 \text{ г/см}^3$, а при $H=100 \text{ км}$ $\Delta\delta=0,026 \text{ г/см}^3$.

Максимальные изменения плотности в $0,026 \text{ г/см}^3$, по заключению К. Р. Коха, являются вполне приемлемыми. В работе [16] найдены значения аномалий плотности после вычитания из геопотенциала потенциала уровенного эллипсоида «гидростатической» Земли. В этом случае для неоднородностей плотности поверхностного слоя толщиной 50 км и верхней мантии — 400 км К. Р. Кох получил соответственно такие результаты: $0,080$ и $0,0096 \text{ г/см}^3$.

Дж. Аркани-Хамед [10] нашел значение горизонтальных неоднородностей плотности в предположении, что они существуют в пределах коры и мантии Земли. Земля представлялась шаром, а внешний гравитационный потенциал — первыми шестью порядками сферических гармоник. Дополнительно Дж. Аркани-Хамед привлек сейсмические данные и применил полученную Ф. Берчем экспериментальную зависимость между плотностью и скоростью продольных сейсмических волн. По его оценкам горизонтальные вариации $\Delta\delta$ в земной коре имеют порядок $0,3 \text{ г/см}^3$, в верхней мантии $0,1 \text{ г/см}^3$, а в нижней мантии $0,04 \text{ г/см}^3$. Плотностные вариации для верхней мантии достаточно хорошо согласуются с аномалиями, полученными У. Каулой в работе [14].