

УДК 528.14/16:683.3

А. А. ГОНЧАРОВ

ОБ УРАВНИВАНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ

В сложных геодезических построениях возникает большое число условных уравнений с различными видами геометрических условий. При уравнивании триангуляционных сетей очень

важно правильно подсчитать общее число этих уравнений и составить геометрические условия, которые выводятся из различных геометрических соотношений. В зависимости от вида выбранных соотношений получаются и различные виды самих условий: условные уравнения фигур, горизонта, базисные, полюсные, координатные и др. Так как общепринятый подход к составлению условных уравнений различен, то создаются определенные трудности для программирования уравнительных вы-

числений коррелятным способом на ЭВМ.

Этих трудностей можно избежать, если при уравнивании геодезических сетей коррелятным методом применять типовые условные уравнения. Единообразие составления типовых уравнений позволит создать единый алгоритм для программирования по способу условий на ЭВМ.

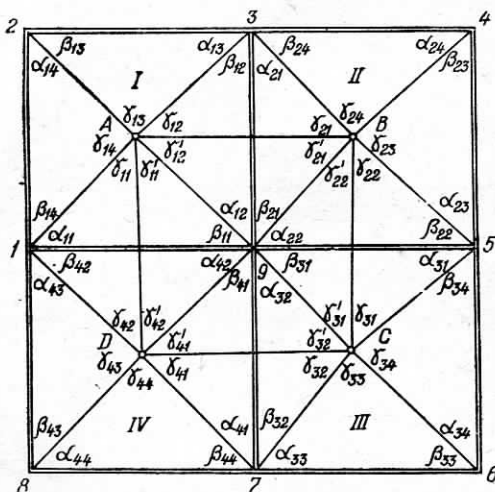


Рис. 1. Схема локальной триангуляционной сети.

Чтобы уравнивать сети коррелятным методом с использованием типовых условных уравнений, рассмотрим локальную триангуляционную сеть, изображенную на рис. 1. В локальной сети углы измерены так, как показано на рис. 1. Такие сети

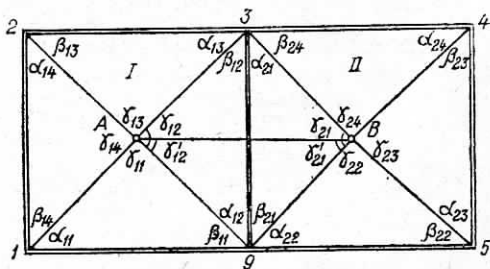


Рис. 2. Часть схемы сети.

наблюдаются в сплошных сетях триангуляции II кл., заполняемых пунктами III кл., и могут применяться при строительстве и эксплуатации крупных сооружений. Для простоты рассуждений возьмем только две центральные системы I и II с двумя определяемыми пунктами A, B и рассмотрим отдельно фигуру, показанную на рис. 2. В этой фигуре измерено 26 углов, из них избыточных 22. В качестве углов, необходимых для вычисления

приближенных координат пунктов A и B , примем углы α_{11}, β_{11} и α_{21}, β_{21} .

Составим условные уравнения. Для этого запишем уравнения поправок для всех углов нашей фигуры:

для центральной фигуры I

$$(\alpha_{11}) = -a_{A1} \xi_A - b_{A1} \eta_A + l_1;$$

$$(\beta_{11}) = a_{A9} \xi_A + b_{A9} \eta_A + l_2;$$

$$(\gamma_{11}) = a_{A1} \xi_A + b_{A1} \eta_A - a_{A9} \xi_A - b_{A9} \eta_A + l_3;$$

$$(\alpha_{12}) = -a_{A9} \xi_A - b_{A9} \eta_A + l_4;$$

$$(\beta_{12}) = a_{A3} \xi_A + b_{A3} \eta_A + l_5;$$

$$(\gamma_{12}) = a_{A9} \xi_A + b_{A9} \eta_A - a_{A3} \xi_A - b_{A3} \eta_A + l_6;$$

$$(\alpha_{13}) = -a_{A3} \xi_A - b_{A3} \eta_A + l_7; \quad (1)$$

$$(\beta_{13}) = a_{A2} \xi_A + b_{A2} \eta_A + l_8;$$

$$(\gamma_{13}) = a_{A3} \xi_A + b_{A3} \eta_A - a_{A2} \xi_A - b_{A2} \eta_A + l_9;$$

$$(\alpha_{14}) = -a_{A2} \xi_A - b_{A2} \eta_A + l_{10};$$

$$(\beta_{14}) = a_{A1} \xi_A + b_{A1} \eta_A + l_{11};$$

$$(\gamma_{14}) = a_{A2} \xi_A + b_{A2} \eta_A - a_{A1} \xi_A - b_{A1} \eta_A + l_{12};$$

$$(\gamma'_{12}) = a_{A9} \xi_A + b_{A9} \eta_A - a_{BA} \xi_B - b_{BA} \eta_B - a_{AB} \xi_A - b_{AB} \eta_A + l_{13};$$

для центральной фигуры II

$$(\alpha_{21}) = -a_{B3} \xi_B - b_{B3} \eta_B + l_{14};$$

$$(\beta_{21}) = a_{B9} \xi_B + b_{B9} \eta_B + l_{15};$$

$$(\gamma_{21}) = a_{B3} \xi_B + b_{B3} \eta_B - a_{B9} \xi_B - b_{B9} \eta_B + l_{16};$$

$$(\alpha_{22}) = -a_{B9} \xi_B - b_{B9} \eta_B + l_{17};$$

$$(\beta_{22}) = a_{B5} \xi_B + b_{B5} \eta_B + l_{18};$$

$$(\gamma_{22}) = a_{B9} \xi_B + b_{B9} \eta_B - a_{B5} \xi_B - b_{B5} \eta_B + l_{19}; \quad (2)$$

$$(\alpha_{23}) = -a_{B5} \xi_B - b_{B5} \eta_B + l_{20};$$

$$(\beta_{23}) = a_{B4} \xi_B + b_{B4} \eta_B + l_{21};$$

$$(\gamma_{23}) = a_{B5} \xi_B + b_{B5} \eta_B - a_{B4} \xi_B - b_{B4} \eta_B + l_{22};$$

$$(\alpha_{24}) = -a_{B4} \xi_B + b_{B4} \eta_B + l_{23};$$

$$(\beta_{24}) = a_{B3} \xi_B + b_{B3} \eta_B + l_{24};$$

$$(\gamma_{24}) = a_{B4} \xi_B + b_{B4} \eta_B - a_{B3} \xi_B - b_{B3} \eta_B + l_{25};$$

$$(\gamma'_{21}) = a_{AB} \xi_A + b_{AB} \eta_A + a_{B4} \xi_B + b_{BA} \eta_B - a_{B9} \xi_B - b_{B9} \eta_B + l_{26};$$

где $a_{Ai} = \rho \frac{\sin A_{Ai}}{S_{Ai}}$; $b_{Ai} = -\rho \frac{\cos A_{Ai}}{S_{Ai}}$; $l_i = (A_{\text{п}} - A_{\text{л}}) - \alpha_i$; A_{Ai} — вычисленный дирекционный угол соответствующей стороны; l_i — свободные члены уравнений поправок; ξ_A, η_A — поправки в приближенные координаты; $A_{\text{п}} - A_{\text{л}}$ — значения разности дирекционных углов правых и левых сторон, образующих угол.

Решим первые два уравнения системы (1) и (2) относительно параметров $\xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B$:

$$\begin{aligned} \xi_A &= -\frac{b_{A9}(\alpha_{11}) + b_{A1}(\beta_{11})}{a_{A1}b_{A9} - a_{A9}b_{A1}}; & \eta_A &= \frac{a_{A9}(\alpha_{11}) + a_{A1}(\beta_{11})}{a_{A1}b_{A9} - a_{A9}b_{A1}}; \\ \xi_B &= -\frac{b_{B9}(\alpha_{21}) + b_{B3}(\beta_{21})}{a_{B3}b_{B9} - a_{B9}b_{B3}}; & \eta_B &= \frac{a_{B9}(\alpha_{21}) + a_{B3}(\beta_{21})}{a_{B3}b_{B9} - a_{B9}b_{B3}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученные значения $\xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B$ подставим в оставшиеся уравнения. После некоторых преобразований имеем систему условных уравнений для фигуры I:

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}) + (\beta_{11}) + (\gamma_{11}) + \omega_{11} &= 0; & \omega_{11} &= -l_3; \\ (\alpha_{12}) + (\beta_{12}) + (\gamma_{12}) + \omega_{12} &= 0; & \omega_{12} &= -(l_4 + l_5 + l_6); \\ (\alpha_{13}) + (\beta_{13}) + (\gamma_{13}) + \omega_{13} &= 0; & \omega_{13} &= -(l_1 + l_8 + l_9); \\ (\alpha_{14}) + (\beta_{14}) + (\gamma_{14}) + \omega_{14} &= 0; & \omega_{14} &= -(l_{10} + l_{11} + l_{12}); \\ (\alpha_{11}) + (\beta_{14}) + \omega_{15} &= 0; & \omega_{15} &= -l_{11}; \\ (\alpha_{12}) + (\beta_{11}) + \omega_{16} &= 0; & \omega_{16} &= -l_4; \\ (\alpha_{13}) + (\beta_{12}) + \omega_{17} &= 0; & \omega_{17} &= -(l_7 + l_5); \\ (\alpha_{14}) + (\beta_{13}) + \omega_{18} &= 0; & \omega_{18} &= -(l_8 + l_{10}); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \gamma_{12} \sin \beta_{11} \sin \beta_{12}}{\sin \gamma_{11} \sin \alpha_{11} \sin \alpha_{12}} (\alpha_{11}) + \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \sin \beta_{12}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{12}} (\beta_{11}) - (\beta_{12}) + \omega_{1.9} = 0; \\ &\frac{\sin (\gamma_{12} + \gamma_{13}) \sin \beta_{11} \sin \beta_{12} \sin \beta_{13}}{\sin \gamma_{11} \sin \alpha_{11} \sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{13}} (\alpha_{11}) + \\ &+ \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13}) \cdot \sin \beta_{12} \sin \beta_{13}}{\sin \gamma_{11} \sin \alpha_{12} \cdot \sin \alpha_{13}} (\beta_{11}) - (\beta_{13}) + \omega_{1.10} = 0; \\ &-\frac{\sin \gamma'_{12} \cdot \sin \beta_{11} \cdot \sin \gamma_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{11} \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} (\alpha_{11}) + \\ &+ \left[1 - \frac{\sin (\gamma_{11} + \gamma'_{12}) \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin (\alpha_{12} + \beta_{21})} \right] (\beta_{11}) + \\ &+ \frac{\sin \gamma'_{21} \cdot \sin (\gamma_{12} - \gamma'_{12})}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin (\beta_{12} + \alpha_{21})} (\alpha_{21}) - \end{aligned}$$

$$-\frac{\sin(\gamma_{21} - \gamma'_{21}) \cdot \sin \gamma'_{12}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin(\alpha_{12} + \beta_{21})} (\beta_{21}) - (\gamma'_{12}) + \omega_{1.11} = 0,$$

где $\omega_{1.9} = -l_5$; $\omega_{1.10} = -l_8$; $\omega_{1.11} = -l_{13}$.

Как видно из системы уравнений (4), первые восемь геометрических условий есть не что иное, как условные уравнения фигур и суммы углов. Оставшиеся три уравнения — типовые и представляют собой связь между поправками в избыточно измеренные углы и в углы, которые необходимы при определении приближенных координат определяемых пунктов. По внешнему виду первых двух типовых уравнений можно составить механические правила для вычисления коэффициентов при поправках α_{11} и β_{11} .

Аналогично получим систему условных уравнений для фигуры II:

$$\begin{aligned} (\alpha_{21}) + (\beta_{21}) + (\gamma_{21}) + \omega_{21} &= 0; & \omega_{21} &= -l_{16}; \\ (\alpha_{22}) + (\beta_{22}) + (\gamma_{22}) + \omega_{22} &= 0; & \omega_{22} &= -(l_{17} + l_{18} + l_{19}); \\ (\alpha_{23}) + (\beta_{23}) + (\gamma_{23}) + \omega_{23} &= 0; & \omega_{23} &= -(l_{20} + l_{21} + l_{22}); \\ (\alpha_{24}) + (\beta_{24}) + (\gamma_{24}) + \omega_{24} &= 0; & \omega_{24} &= -(l_{23} + l_{24} + l_{25}); \\ (\alpha_{21}) + (\beta_{24}) + \omega_{25} &= 0; & \omega_{25} &= -l_{24}; \\ (\alpha_{22}) + (\beta_{21}) + \omega_{26} &= 0; & \omega_{26} &= -l_{17}; \\ (\alpha_{23}) + (\beta_{22}) + \omega_{27} &= 0; & \omega_{27} &= -(l_{18} + l_{20}); \\ (\alpha_{24}) + (\beta_{23}) + \omega_{28} &= 0; & \omega_{28} &= -(l_{21} + l_{23}); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\sin \gamma_{22} \cdot \sin \beta_{21} \cdot \sin \beta_{22}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{21} \cdot \sin \alpha_{22}} (\alpha_{21}) +$$

$$+ \frac{\sin(\gamma_{21} + \gamma_{22}) \cdot \sin \beta_{22}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{22}} (\beta_{21}) - (\beta_{22}) + \omega_{e.s} = 0;$$

$$\frac{\sin(\gamma_{22} + \gamma_{23}) \cdot \sin \beta_{21} \cdot \sin \beta_{22} \cdot \sin \beta_{23}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{21} \cdot \sin \alpha_{22} \cdot \sin \alpha_{23}} (\alpha_{21}) +$$

$$+ \frac{\sin(\gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{23}) \cdot \sin \beta_{22} \cdot \sin \beta_{23}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin \alpha_{22} \cdot \sin \alpha_{23}} (\beta_{21}) - (\beta_{23}) + \omega_{2.10} = 0;$$

$$\frac{\sin \gamma'_{12} \cdot \sin \beta_{11} \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin \alpha_{11} \cdot \sin(\alpha_{12} + \beta_{21})} (\alpha_{11}) + \frac{\sin(\gamma_{11} + \gamma'_{12}) \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{11} \cdot \sin(\alpha_{12} + \beta_{21})} (\beta_{11}) -$$

$$- \frac{\sin \gamma'_{21} \cdot \sin(\gamma_{12} - \gamma'_{12})}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin(\alpha_{21} + \beta_{12})} (\alpha_{21}) +$$

$$+ \left[\frac{\sin(\gamma_{21} - \gamma'_{21}) \cdot \sin \gamma'_{21}}{\sin \gamma_{21} \cdot \sin(\alpha_{12} + \beta_{21})} - 1 \right] (\beta_{21}) - (\gamma'_{21}) + \omega_{2.11} = 0,$$

где $\omega_{2.9} = -l_{18}$; $\omega_{2.10} = -l_{21}$; $\omega_{2.11} = -l_{26}$.

Для первых двух типовых условных уравнений в центральных фигурах I и II можно составить общую формулу, которая будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \left(\sum_{i=2}^{n+1} \gamma_{Ki} \right) \prod_{j=1}^{n+1} \sin \beta_{Kj}}{\sin \gamma_{K1} \prod_{j=1}^{n+1} \sin \alpha_{Kj}} (\alpha_{K1}) + \\ & + \frac{\sin \left(\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{Ki} \right) \prod_{j=2}^{n+1} \sin \beta_{Kj}}{\sin \gamma_{K1} \prod_{j=2}^{n+1} \sin \alpha_{Kj}} (\beta_{K1}) - (\beta_{K, n+1}) + \omega_{K, n} = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь K — порядковый номер центральных систем ($K=1, 11$); n — порядковый номер типовых уравнений ($n=1, 2, \dots$). Формула (6) составления типовых условных уравнений и вычисления коэффициентов при поправках справедлива только для центральных систем жесткой локальной сети. Необходимо отметить, что типовые уравнения будут возникать только для углов β_{Ki} , не прилегающих к углам α_{Ki} и β_{K1} , выбранным для вычисления приближенных координат определяемых пунктов A, B, C и D .

Последние типовые уравнения центральных фигур I и II также могут составляться по общим формулам и механическим правилам. Эти типовые уравнения характерны для геодезических четырехугольников, наблюдающихся в нашей локальной сети и возникающих вследствие перекрывающихся диагоналей. Общие формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin \gamma'_{K2} \sin \beta_{K1} \sin \gamma'_{K+1.1}}{\sin \gamma_{K1} \sin \alpha_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} (\alpha_{K1}) + \\ & + \left[1 - \frac{\sin (\gamma_{K1} + \gamma'_{K2}) \sin \gamma'_{K+1.1}}{\sin \gamma_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} \right] (\beta_{K1}) + \\ & + \frac{\sin \gamma'_{K+1.1} \sin (\gamma_{K2} - \gamma'_{K2})}{\sin \gamma_{K+1.1} \sin (\beta_{K2} + \alpha_{K+1.1})} (\alpha_{K+1.1}) - \\ & - \frac{\sin (\gamma_{K+1.1} - \gamma'_{K+1.1}) \sin \gamma'_{K2}}{\sin \gamma_{K+1.1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} (\beta_{K+1.1}) - (\gamma'_{K2}) + \omega_{K, r+1} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где r — число условных уравнений фигур и суммы углов; для избыточно измеренных углов γ'_{K+1}

$$\frac{\sin \gamma'_{K2} \sin \beta_{K1} \sin \gamma'_{K+1.1}}{\sin \gamma_{K1} \sin \alpha_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} (\alpha_{K1}) + \frac{\sin (\gamma_{K1} + \gamma'_{K2}) \sin \gamma'_{K+1.1}}{\sin \gamma_{K1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} (\beta_{K1}) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sin \gamma'_{K+1.1} \sin (\gamma_{K2} - \gamma'_{K2})}{\sin \gamma_{K+1.1} \sin (\beta_{K2} + \alpha_{K+1.1})} (\alpha_{K+1.1}) \times \\
 & \times \left[\frac{\sin (\gamma_{K+1.1} - \gamma'_{K+1.1}) \sin \gamma'_{K2}}{\sin \gamma_{K+1.1} \sin (\alpha_{K2} + \beta_{K+1.1})} - 1 \right] (\beta_{K+1.1}) - (\gamma'_{K+1.1}) + \omega_{K+1.2+1} = 0.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Анализируя формулы (7) и (8), можно заметить, что, вычислив коэффициенты при поправках по одной формуле, легко получить коэффициенты при поправках для другой формулы.

После решения нормальных уравнений и определения поправок к измеренным углам поправки координат получаемого пункта находятся по формулам (3) без повторного вычисления сети по уравненным углам.

Таким образом, пользуясь общими формулами (6), (7), можно быстро составлять однотипные уравнения вместо полюсных, базисных и координатных условных. Полученные формулы для составления типовых уравнений и механические правила образования коэффициентов при поправках позволяют значительно сократить объем вычислительных работ при уравнивании.

Уравнивание локальных триангуляционных сетей с применением типовых условных уравнений и механических правил можно производить по способу Крюгера-Урмаева.

Список литературы: 1. Герасименко М. Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1973, вып. 3. 2. Маркузе Ю. И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. — М.: Недра, 1972. 3. Монин И. Ф. О типовом условном уравнении в триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 4. Терпугов К. Н., Гордеев Ю. А. Уравнивание линейных триангуляций по методу условий с использованием типового условного уравнения и механических правил. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1961, вып. 4.