УДК 528.236:517.54

*В. Г. КИРИЛЛОВ*

# О КОНФОРМНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть дана функция, выражающая преобразование инверсии [1],

$$f(x_i) = \frac{i^2 (x_i - a_i)}{(x_i - x_i)^2}, \tag{1}$$

где $r$ — радиус сферы инверсии; $x_i$ — координаты точки в области определения функции; $a_i$ — координаты центра инверсии. Инверсия является одним из видов конформных преобразований в пространстве.

Согласно теореме Лиувилля, в пространстве с числом измерений $n \geqslant 3$ конформными будут только мёбиусовы преобразования * [5], т. е. преобразования, представляющие сочетание инверсии, гомотетии (равномерного сжатия или растяжения), параллельного переноса и поворотов **. Уравнения сферического преобразования в общем виде можно записать так:

$$X' = f_1(X, Y, Z); \quad Y' = f_2(X, Y, Z);$$

---

* Мёбиусовы преобразования называют также сферическими [2], так как они отображают сферы в сфере.

** Композиции последних трех (гомотетии, сдвигов и поворотов) носят названия преобразований подобия [1], или линейных конформных преобразований [6].

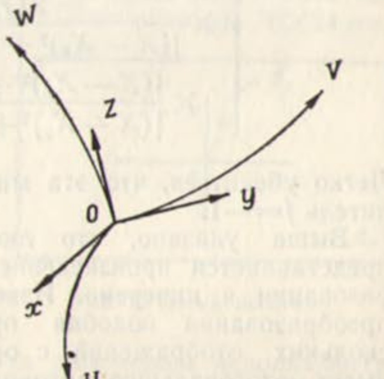
$$Z' = f_3(X, Y, Z). \qquad (2)$$

В 1964 г. Э. Михаэль [6] без доказательства и ссылок на литературные источники отметил, что любое конформное преобразование в трехмерном пространстве должно сохранять ортогональность якобиевой матрицы $A$, т. е. матрицы, составленной из частных производных уравнений (2) и имеющей вид

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X'}{\partial X} & \dfrac{\partial X'}{\partial Y} & \dfrac{\partial X'}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial Y'}{\partial X} & \dfrac{\partial Y'}{\partial Y} & \dfrac{\partial Y'}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X} & \dfrac{\partial Z'}{\partial Y} & \dfrac{\partial Z'}{\partial Z} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Проверим правильность этого утверждения. Из работы [2] известно, что инверсия преобразует прямые линии, не проходящие через ее центр, в окружности, поэтому прямолинейную систему координат она отображает в криволинейную.

В тензорном анализе при исследовании криволинейных координат $U$, $V$, $W$ применяют локальный базис, состоящий из векторов $x$, $y$, $z$, касательных к координатным линиям (см. рисунок). Как известно [4], углы между осями локального базиса тождественны углам между координатными кривыми в точке касания. Поэтому, если исходная система координат ортогональна, то построенный после ее сферического преобразования локальный базис также будет ортогональным. А переход от одного ортогонального базиса к другому может осуществляться только отображением с ортогональной матрицей [4].



Локальный базис криволинейной системы координат.

Покажем это на примере. Уравнение инверсии, центр которой не совпадает с началом координат, запишется так [1]:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \frac{r^2}{[(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2]} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Якобиева матрица такого преобразования будет иметь вид

$$
A = \left|
\begin{array}{c}
\dfrac{[-(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{-2(X-X_0)(Y-Y_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{-2(X-X_0)(Z-Z_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]} \\
\dfrac{-2(X-X_0)(Y-Y_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{[(X-X_0)^2-(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{-2(Y-Y_0)(Z-Z_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]} \\
\dfrac{-2(X-X_0)(Z-Z_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{-2(Y-Y_0)(Z-Z_0)}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}\times \\
\times\dfrac{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2-(Z-Z_0)^2]}{[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2]}
\end{array}
\right| . \qquad (5)
$$

Легко убедиться, что эта матрица ортогональна, а ее определитель $j=-1$.

Выше указано, что любое сферическое преобразование представляется произведением линейного конформного преобразования и инверсии. Известно [1], что якобиева матрица преобразования подобия ортогональна, а произведение нескольких отображений с ортогональными матрицами также имеет ортогональную матрицу. Следовательно, Э. Михаэль был прав, утверждая, что якобиева матрица конформного преобразования должна быть ортогональной.

Э. Михаэль [6], а впоследствии и З. Ситек [7] отметили невозможность существования конформных полиномов выше первой степени. Однако такое мнение этих канадских ученых неправильно, потому что сферическое преобразование, включающее инверсию, конформно, но нелинейно и поэтому может быть представлено полиномами выше первой степени.

Нами показано, что условия Хедрика-Инголда [3] контролируют ортогональность матрицы преобразования. Следовательно, формулы любого преобразования с ортогональной матрицей (и с якобиевой матрицей трехмерного конформного преобразования) должны удовлетворять этим условиям.

**Список литературы:** 1. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1974. 2. *Каган В. Ф.* Теория поверхностей в тензорном изложении. — М.: Гостехиздат, 1948, ч. 2. 3. *Кириллов В. Г.* К вопросу о преобразовании ортогональных систем координат в спутниковой геодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1974. 5. *Liouville J.* Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique. Application de l'analyse á la Geométrie. G. Monge, Paris, 1850. 6. *Mikhail E. M.* Simultaneous three-dimensional transformation of higher degrees. — Photogrammetric Engineering, 1964, N 4. 7. *Sitek Z.* Analityczne wyrównanie aerotriangulacji za pomocą wielomianów. — Przegląd geodezyjny, 1967, N 9.

Статья поступила в редколлегию 28. 04. 81