

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

## ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ЦЕПЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

С появлением прецизионной свето- и радиодальномерной техники стало возможным по-новому решать проблемы построения геодезического обоснования. Широкое распространение получили такие методы создания геодезического обоснования, как полигонометрия, линейно-угловая триангуляция и трилатерация.

Эффективность построения опорных геодезических сетей методом трилатерации для решения как инженерных, так и научных задач изучается во многих работах [1—3, 5, 6, 8, 10—15].

Цель настоящей статьи — исследование влияния дополнительно измеренных линий на характер накопления погрешностей в цепях трилатерации.

В работе [5] И. А. Кутузов получил формулы оценки точности цепи трилатерации из геодезических четырехугольников (рисунок), в которых измеряются стороны  $(a_i, c_i, d_i, (i=1, n))$  и  $b_{i, i+1}, b'_{i', i'+1}$ , где  $i=0, n-1$ . Согласно этой работе, обратные

веса продольного, поперечного сдвигов удаленного пункта  $n$  сети и дирекционного угла удаленной стороны  $a_n$  для цепи из геодезических квадратов могут быть вычислены по формулам:

$$1/P_t = 0,90n - 0,02; \quad 1/P_u = 0,67n^3 - 0,13n^2 + 0,98n + 1,42; \\ 1/P_\alpha = 2n \cdot \rho''^2/a^2. \quad (1)$$

В работе [1] выведены аналогичные формулы для цепи трилатерации из геодезических прямоугольников и ромбов в случае, когда в цепи (рисунок) кроме сторон  $a_i, c_i, d_i$  измеряются звенья верхней и нижней диагоналей сети  $b_{0i}$  и  $b'_{0'i'}$ .

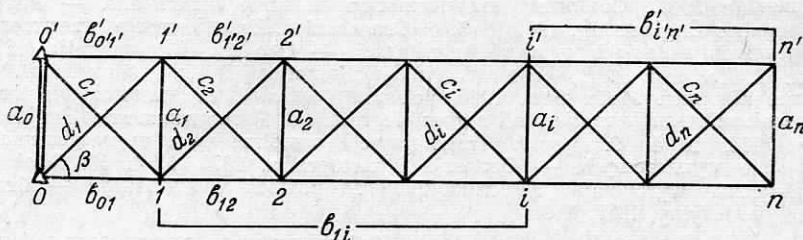


Схема цепи трилатерации.

где  $i = \overline{1, n}$ . В проведенных в работе [1] исследованиях существенно то, что скорость накопления величин  $1/P_F$  значительно меньшая, чем в цепях, исследованных И. А. Кутузовым.

Для цепи трилатерации из геодезических квадратов формулы, полученные в работе [1], имеют вид:

$$1/P_t = 0,900; \quad 1/P_u = 1,975n^2; \quad 1/P_\alpha = 4,475 \cdot \rho''^2/a^2. \quad (2)$$

Мы ставили задачи, во-первых, исследовать характер накопления величин  $1/P_t, 1/P_u$  пунктов верхней и нижней диагоналей цепи трилатерации из геодезических четырехугольников, изображенной на рисунке, для случая, когда в этой цепи, кроме сторон  $a_i, c_i, d_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), измеряются звенья  $b_{ki}$  и  $b'_{k'i'}$  ( $k = \overline{0, n-1}, i = \overline{k+1, n}$ ), т. е. когда звенья верхней и нижней диагоналей сети измеряются «во всех комбинациях»; во-вторых, на основании исследований, проведенных в работах [1, 5] и в настоящей статье, дать рекомендации (приближенные формулы), позволяющие учитывать влияние дополнительных линейных измерений на точность положения пунктов сети.

Рассмотрим только сети трилатерации из геодезических четырехугольников (прямоугольников с продвигом  $l = b/a = 0,2, 0,4, 0,6, \dots, 3,0$  и ромбов с углами  $\beta^\circ = 5^\circ, 10^\circ, \dots, 85^\circ$ ). Пункты по верхней и нижней диагоналям ряда пронумерованы слева направо, начиная с нуля. Поэтому номер точки  $i$  равен числу фигур, отделяющих точку от края сети.

Как и в работе [1], было сделано предположение, что все измерения выполнены равномерно. Выберем метод уравнивания

сети. При уравнивании коррелятным методом количество условных и нормальных уравнений будет равно количеству избыточных измерений:

$$R_K = n^2, \quad (3)$$

где  $n$  — количество фигур в ряде.

При уравнивании параметрическим методом количество уравнений погрешностей равно количеству всех измеренных линий:

$$R_{\Pi} = n^2 + 4n. \quad (4)$$

Число нормальных уравнений равно удвоенному количеству всех определяемых пунктов

$$N_{\Pi} = 4n. \quad (5)$$

Поскольку при  $n > 4$  количество нормальных уравнений, возникающих в сети при уравнивании параметрическим методом, будет меньше, чем при уравнивании коррелятным и вид уравнений поправок более простой, чем вид условных уравнений, то нами выбран параметрический метод уравнивания.

При уравнивании параметрическим методом возникают уравнения погрешностей вида

$$-\cos \alpha'_{ki} \xi_k - \sin \alpha'_{ki} \eta_k + \cos \alpha'_{ki} \xi_i + \sin \alpha'_{ki} \eta_i + l_{ki} = v_{ki}, \quad (6)$$

где  $k$  и  $i$  — номера пунктов, между которыми измеряется линия;  $\alpha'_{ki}$  — предварительное значение дирекционного угла линии  $ki$ ;  $\xi_k, \xi_i, \eta_k, \eta_i$  — поправки в координаты пунктов;  $l_{ki}$  — свободный член;  $v_{ki}$  — поправки в измеренную сторону.

Обратный вес функции уравненных величин вычисляем по формуле

$$1/P_F = \sum_{i=1}^n \frac{[r_i f(i-1)]^2}{[r_i r_i (i-1)]}, \quad (7)$$

где  $f$  — частные производные весовой функции;  $n$  — число нормальных уравнений, равное удвоенному числу определяемых пунктов в ряде. Весовые функции продольного и поперечного сдвига имеют простой вид. Так, весовую функцию продольного сдвига  $k$ -го пункта первой диагонали можно записать в виде:

$$F_{x_k} = x_k; \quad dF_{x_k} = (x)_k = \xi_k. \quad (8)$$

Аналогично для поперечного сдвига

$$dF_{y_k} = (y)_k = \eta_k. \quad (9)$$

Системе уравнений погрешностей (6) соответствует матрица коэффициентов нормальных уравнений, верхняя часть которой для цепи из прямоугольников

$$N_{\text{пря}} = \left\| \begin{array}{cccc} A & C & D & E \\ & A & K & L \\ & & B & M \\ & & & B \end{array} \right\|, \quad (10)$$

где  $A, B, C, D, E, K, L, M$  — подматрицы размера  $n \times n$ ,

$$A = \begin{vmatrix} t & & & & \\ & t & & & \\ & & t & & \\ \dots & & & \dots & \\ & & & & t \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & m & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & m & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m \end{vmatrix}; \quad (11)$$

$$C = \begin{vmatrix} -1 & -b & & & \\ -b & -1 & -b & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & -b & -1 & -b \\ & & & -b & -1 \end{vmatrix}; \quad D = -L = \begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & f \end{vmatrix};$$

$$E = -K = \begin{vmatrix} 0 & f & & & \\ -f & 0 & f & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & -f & 0 & f \\ & & & -f & 0 \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} 0 & -c & & & \\ -c & 0 & -c & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & -c & 0 & -c \\ & & & -c & 0 \end{vmatrix}.$$

В выражениях (11) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} b &= l^2/(1+l^2); \quad t = 1+2b^2; \quad c = 1/\sqrt{1+l^2}; \\ m &= n+2/(1+l^2); \quad d = 1/(1+l^2); \quad f = l/(1+l^2); \end{aligned} \quad (12)$$

где  $t = \frac{b}{a}$  — продвиг фигуры (см. рисунок).

Аналогичный блочный вид будет иметь матрица коэффициентов нормальных уравнений для цепи трилатерации из геодезических ромбов

$$N_{\text{ромб}} = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ & E & K & L \\ & & M & Z \\ & & & T \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A &= \begin{vmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ \dots & & \dots & & \\ & & & a & \\ & & & & b \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} -x & -r & & & \\ -r & -x & -r & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & -r & -x & -r \\ & & & & -x \end{vmatrix}; \\ C &= \begin{vmatrix} k & & & & \\ & k & & & \\ \dots & & \dots & & \\ & & & k & \\ & & & & v \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} k & d & & & \\ -d & k & d & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & -d & k & d \\ & & & -d & k \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$F = \begin{vmatrix} a & & & & & \\ & a & & & & \\ \dots & & & & & \\ & & & a & & \\ & & & & & c \end{vmatrix}; \quad K = \begin{vmatrix} k & -d & & & & \\ d & k & -d & & & \\ \dots & & & & & \\ & & & d & k & -d \\ & & & & d & k \end{vmatrix};$$

$$L = \begin{vmatrix} -k & & & & & \\ & -k & & & & \\ \dots & & & & & \\ & & & -k & & \\ & & & & & m \end{vmatrix}; \quad Z = \begin{vmatrix} -r & -s & & & & \\ -t & -r & -s & & & \\ \dots & & & & & \\ & & & -t & -r & -s \\ & & & & -t & |r \end{vmatrix};$$

$$M = \begin{vmatrix} f & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & f & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & f & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & f \end{vmatrix}; \quad T = \begin{vmatrix} f & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & f & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & f & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & p \end{vmatrix}.$$

В (14) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} s &= \sin^2 \beta; & a &= x+1; & p &= n+r-s; \\ t &= \cos^2 \beta; & b &= x+s; & f &= n+r+1; \\ x &= \sin^2 2\beta; & c &= x+t; & w &= n+r+t. \\ r &= \cos^2 2\beta; & m &= -k-d; \\ d &= \sin \beta \cdot \cos \beta; & v &= -k+d; \\ k &= -\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta; \end{aligned} \quad (15)$$

Выявленные закономерности в формировании матрицы коэффициентов нормальных уравнений и весовых функций были использованы при составлении программы для ЭВМ, составленной на языке Фортан-4, где предусмотрено выполнение сплошной оценки точности для любого количества фигур и любых значений  $l$  и  $\beta^\circ$ . Вычисления производились на ЭВМ М-4030.

В результате анализа проведенных вычислений получены формулы, позволяющие предвычислять значения обратных весов продольного и поперечного сдвигов крайних пунктов цепи трилатерации из геодезических прямоугольников и ромбов. Так, обратный вес продольного сдвига первой и второй диагоналей цепи из ромбов и прямоугольников можно рассчитать по формуле

$$1/P_t = 1,990/(n+1,170), \quad (16)$$

т. е. значения обратных весов  $1/P_t$  не зависят от  $\beta^\circ$  и  $l$ . Значения обратных весов поперечного сдвига для тех же диагоналей в цепях из ромбов при  $0^\circ < \beta^\circ \leq 45^\circ$  будут:

$$1/P_{u_1, \beta^\circ} = 1/P_{u_2, 90^\circ - \beta^\circ} = (0,62n - 0,78) \operatorname{ctg}^2 \beta + 2,36n - 0,99; \quad (17)$$

$$1/P_{u_2, \beta^\circ} = 1/P_{u_1, 90^\circ - \beta^\circ} = (0,63n + 0,06) \operatorname{ctg}^2 \beta + 2,35n - 1,71. \quad (17')$$

Значения обратных весов поперечного сдвига крайних пунктов для цепи из геодезических прямоугольников, как оказалось, можно подсчитать по формуле

$$1/P_{u_1} = 1/P_{u_2} = (2,48n - 1,72)l^2 + 0,50n - 0,05. \quad (18)$$

Подводя итоги первой части проведенных исследований, можно сделать следующие выводы:

1. Продольный сдвиг крайних пунктов верхней и нижней диагоналей для цепи из прямоугольников и ромбов с увеличением  $n$  уменьшается по гиперболе.

2. Поперечный сдвиг крайних пунктов верхней и нижней диагоналей для цепи из прямоугольников и ромбов при постоянном  $l$  и  $\beta^\circ$  с увеличением  $n$  линейно возрастает.

3. Поперечный сдвиг для цепи из прямоугольников при постоянном  $n$  с увеличением  $l$  возрастает по квадратичной параболе и  $1/P_{u_1} = 1/P_{u_2}$ .

4. Поперечный сдвиг для цепи из ромбов для конечного пункта верхней диагонали при  $n = \text{const}$  с увеличением  $\beta^\circ$  от  $0^\circ$  до  $45^\circ$  уменьшается по формуле (17), а с увеличением  $\beta^\circ$  от  $45^\circ$  до  $90^\circ$  увеличивается по формуле (17').

5. Для цепи из ромбов наблюдается симметрия

$$1/P_{u_1, \beta^\circ} = 1/P_{u_2, 90^\circ - \beta^\circ}. \quad (19)$$

6. Сравнивая полученные формулы с формулами, приведенными И. А. Кутузовым в работе [5] и автором в работе [1], для цепей трилатерации из геодезических прямоугольников и ромбов, видим, что у нас значения обратных весов продольного сдвига с увеличением  $n$  незначительно уменьшаются по формуле (16), тогда как в работе [5] накопление происходит по полиному первой степени, а в работе [1] величина  $1/P_i$  постоянная и не зависит от количества фигур.

7. Накопление обратных весов поперечного сдвига в исследуемой сети происходит по полиному первой степени, в работе [5] — по полиному третьей степени, в работе [1] — по полиному второй степени.

Таким образом, введение дополнительных измерений по предлагаемой схеме позволяет получать координаты определяемых пунктов значительно точнее, с более равномерным накоплением погрешностей, чем в ранее рассмотренных схемах. По нашему мнению, такие цепи могут быть использованы при построении специальных геодезических сетей повышенной точности.

Дальнейшее сравнение формул (1), (2) и (16)—(18), соответствующих сетям I, II, III, свидетельствует о сильной зависимости величин  $1/P_F$  не только от числа избыточных измерений, но и от того, какие линии в той же самой сети измеряются. Действительно, формулы (1) и (2) показывают, что для одной и той же сети при равном количестве определяемых пунктов,



измерений и избыточных измерений значения обратных весов тех же элементов сети сильно отличаются.

А из сравнения формул (2) и (16)—(18) видна очень сильная зависимость  $1/P_F$  от количества избыточных измерений.

Мы рассмотрели только три варианта одной и той же сети. Таких вариантов может быть множество, а потому каждый раз выводить новые формулы или же вычислять величины  $1/P_F$  строгим способом явно не эффективно.

Нами была сделана попытка использовать для исследования новых сетей эквивалентные формулы А. И. Дурнева [4]. Для случая, когда число пунктов в сетях I и II одинаково, эта формула имеет вид

$$\frac{1}{P_2} = \frac{N-s}{k-r} \cdot \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{P_1}, \quad (20)$$

где  $k$  — число всех измерений в сети I;  $N$  — число всех измерений в сети II;  $s$  — число избыточных измерений в сети II;  $r$  — число избыточных измерений в сети I. Если в сетях II и I число независимых неизвестных одинаково, т. е.  $N-s=k-r$ , то для этого частного случая формула (20) принимает вид

$$\frac{1}{P_2} = \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{P_1}. \quad (21)$$

Попытка выразить значения обратных весов, соответствующих сети II  $1/P_{II}$  через значения  $1/P_I$  посредством формулы (21) приводит к равенству  $1/P_{II}=1/P_I$ , что не отвечает действительности. Это объясняется тем, что эквивалентные формулы А. И. Дурнева составлены на основании зависимости величины  $1/P_F$  от количества избыточных измерений и не отражают влияния структуры наблюдений, т. е. от того, какие именно линии в сети измеряются.

Мы попытались учесть влияние структуры наблюдений на величины  $1/P_F$  путем введения в формулы (20) и (21) дополнительного сомножителя  $q_2/q_1$ . Тогда эквивалентные формулы (20) и (21) примут вид:

$$\frac{1}{P_2} = \frac{N-s}{k-r} \cdot \frac{k}{N} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{1}{P_1}; \quad (22) \quad \frac{1}{P_2} = \frac{k}{N} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{1}{P_1}, \quad (23)$$

где  $q_1, q_2$  — минимальное количество связующих сторон от исходных до исследуемых элементов сети соответственно в сетях I и II. Например, значение обратного веса продольного сдвига крайнего пункта в сети II, вычисленное с помощью соотношения (23), будет

$$\frac{1}{P_{II_t}} = \frac{5n}{5n} \cdot \frac{1}{h} \cdot (0,90n - 0,02) \cong 0,90, \quad (24)$$

что хорошо согласуется со значением  $1/P_t$  из формулы (2).

В таблице приведены значения обратных весов  $1/P_t$ ,  $1/P_u$ ,  $1/P_\alpha$  пункта  $n$  и линии  $a_n$  для сети вида II и III в случае, когда сеть (см. рисунок) состоит из геодезических квадратов. При этом в качестве исходной принята сеть I.

Формулы обратных весов, найденные с помощью эквивалентного соотношения (23)

Обратный вес	Вид сети	
	II	III
$1/P_t$	0,90	$4,5/(n+4)$
$1/P_u$	$0,67n^2 - 0,13n + 0,98 + 1,42/n$	$(3,35n^2) - 0,65n + 4,9 + 1,42/n)/(n+4)$
$1/P_\alpha$	$2\rho''^2/a^2$	$\frac{10}{n+4} \cdot \frac{\rho''^2}{a^2}$

Сравнение строгих формул (2) и (16)—(18) с соответствующими формулами из таблицы, полученными с помощью эквивалентной формулы (23), показывает, что:

1. Приближенные формулы хорошо отражают качественную картину зависимости величин  $1/P_F$  от  $n$  и структуры наблюдений.

2. Имеется хорошее согласие приближенных и строгих формул для обратных весов продольного сдвига и дирекционных углов.

3. Хотя приближенные формулы, характеризующие зависимость величины  $1/P_u$  от  $n$ , являются полиномом той же степени, что и строгая формула (2), (17)—(18), тем не менее для сети II погрешность приближенной формулы очень большая, а для сети III эта погрешность для целей проектирования удовлетворительная.

Таким образом, предлагаемая эквивалентная формула является в ряде случаев более эффективной по сравнению с формулой А. И. Дурнева. Однако, как отмечено выше, в некоторых случаях она дает неудовлетворительные результаты. Поэтому, с одной стороны, интересными представляются исследования, направленные на определение сферы применения предлагаемых формул, с другой — обеспечивающие дальнейшее усовершенствование эквивалентных формул, что позволяет вплотную подойти к проблеме оптимизации геодезических сетей.

**Список литературы:** 1. Виленский В. А. Оценка точности цепи трилатерации из геодезических четырехугольников. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 28. 2. Бородина Р. М. Построение и уравнивание линейных и линейно-угловых сетей на площадях гидротехнического строительства. — Тр. гидропроекта, 1975, № 46. 3. Бойко Е. Г. К вопросу о распределении ошибок уравненных координат в угловых и линейных сетях. — Геодезия и картография, 1964, № 4. 4. Дурнев А. И. Новые



системы построения геодезических сетей. — М.: Геодезиздат, 1952. 5. *Кутузов И. А.* Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 2. 6. *Невзоров Н. И.* О точности уравненных элементов сплошной сети триангуляции и трилатерации. — Сб. научн. тр. Белорус. с.-х. акад., 1975, вып. 138. 7. *Невзоров Н. И., Соломонов А. А.* Сравнительный анализ различных методов определения точности положения пунктов опорных геодезических сетей. — Сб. научн. тр. Белорус. с.-х. акад., 1976, вып. 22. 8. *Шевченко А. С.* Об эффективности построения опорных геодезических сетей методом трилатерации. — Тр./Харьков. с.-х. ин-т, 1975, вып. 216. 9. *Beluch J.* Analiza porównawcza dokładności kątowno-liniowych i liniowych sieci realizacyjnych, zakładanych przy zastosowaniu dalmierzy elektromagnetycznych do pomiaru odległości. — Zesz. nauk. AGH, 1970, N 263. 10. *Beluch J.* Badania nad możliwością zakładania liniowych sieci realizacyjnych mierzonych dalmierzami elektromagnetycznymi. — Zesz. nauk. AGH, 1971, N 307. 11. *Burke K. F.* Why compare triangulation and trilateration. — Pap. 31 st. Annu. Meet. Amer. Congr. Surv. and Mapp., 1971. Washington D. C.: 1971. 12. *Dracup J.* Testing for evaluating trilateration surveys. — Proc. Amer. Congr. Surv. and Mapp. Fall Conv., Seattle, Wash., 1976, Falls Church, Va, 1976. 13. *Lieberach R.* Beitrag zur Theorie der baulagenetze. — Arb. Vermess. und kartenw. — DDR, 1973, 29. 14. *Gleinswik V. P.* Allgemeine, Vermessungs. — Nachrichten, 1975, 72, 8. 15. *Wolf P.* Trilateration with shot range equipment and comparison with triangulation. — Proc. Amer. Congr. Surv. and Mapp., Land Buena Vista, Fla, 1973, — Washington, D. C. 1973.

Работа поступила в редколлегию 25 декабря 1978 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.