

### О РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИ МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ ПУНКТАМИ

В современной практике геодезических работ с СССР геодезические координаты  $B, L$  вычисляются для пунктов триангуляции I класса (широты и долготы с точностью до  $0,0001''$ , а азимуты — до  $0,001''$ ). Для этого в СССР применяют главным образом формулы Шрейбера—Изотова или Гаусса [2].

В данной статье рассмотрен способ решения прямой геодезической задачи, состоящей из трех этапов: пере-

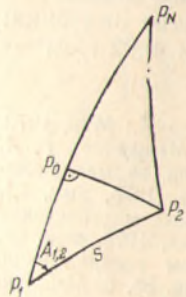


Рис. 1. Эллипсоид.

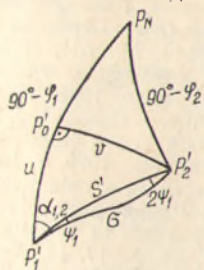


Рис. 2. Шар.

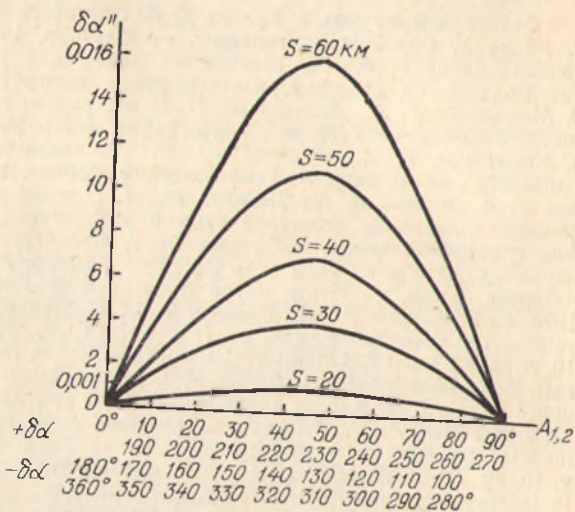


Рис. 3. График величины  $\delta\alpha$ .

ход на сферу с радиусом  $N_1$ , соответствующим геодезической широте  $B_1$  начального пункта; решение задачи на сфере; обратный переход на эллипсоид.

Подобный способ предложил в 1922 г. А. Беррот [4]. Он рассмотрел несколько вариантов решения поставленной задачи. Остановимся на одном из них, в котором при переходе с эллипсоида на сферу радиуса  $N_1$  принимается, что сферическая широта  $\varphi_1$  исходного пункта равна геодезической широте  $B_1$  того же пункта, сферический азимут  $\alpha_{1,2}$  дуги большого круга  $\sigma$  — геодезическому  $A_{1,2}$ , а масштаб изображения — 1 (рис. 1, 2).

Расстояние на сфере  $S'$  и  $\sigma$  вычисляют по формулам:

$$S' = S; \quad (1) \quad \sigma = \frac{S}{N_1} \rho'' \quad (2)$$

Значения  $\delta\varphi$

и,	$\Delta\varphi$															
	2'	4	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32'	
30°	3	12	28	49	77	111	151	197	250	308	373	444	521	625	694	790
32	3	13	29	51	80	115	156	204	259	320	387	460	541	627	720	820
34	3	13	30	53	82	118	161	211	267	329	399	475	557	646	742	845
36	3	13	30	54	84	121	165	216	274	338	409	487	571	663	761	866
38	3	14	31	55	86	124	169	220	279	344	417	496	582	675	776	883
40	3	14	31	56	87	126	171	224	283	349	423	503	591	685	787	895
42	4	14	32	56	88	127	173	226	286	353	427	508	596	691	794	903
44	4	14	32	57	88	127	174	227	287	354	429	510	599	694	797	907
46	4	14	32	57	88	127	173	226	287	354	428	509	598	694	796	906
48	4	14	32	56	88	127	172	225	285	352	426	507	595	690	792	901
50	3	14	31	56	87	125	171	223	282	348	422	502	589	683	784	892
52	3	14	31	55	86	124	168	220	278	343	415	494	580	672	772	878
54	3	13	30	54	84	121	165	215	272	336	407	484	568	658	756	860
56	3	13	29	52	82	118	161	210	265	327	396	471	553	642	736	838
58	3	13	29	51	79	114	156	203	257	317	384	457	536	621	713	811
60	3	12	28	49	76	110	150	196	248	306	370	440	516	598	687	781
62	3	12	26	47	73	105	143	187	237	292	354	421	494	572	657	747
64	3	11	25	44	70	100	136	178	225	278	336	400	469	544	624	710
66	3	10	24	42	66	94	128	168	212	262	316	377	442	512	588	669
68	2	10	22	39	61	88	120	157	198	244	296	352	413	478	549	624
70	2	9	20	36	57	81	111	145	183	226	273	325	381	442	507	577

Далее решают прямую геодезическую задачу на сфере по формулам косвенного метода:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + u; \quad (3) \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \sigma \cos \alpha_{1,2}, \quad (4)$$

$$\sin v = \sin \delta \sin \alpha_{1,2}, \quad (5)$$

где  $u$  и  $v$  — катеты прямоугольного сферического треугольника (рис. 2)

$$\sin \delta = \sin v \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \frac{\Delta\lambda}{2}, \quad (6) \quad \operatorname{tg} \Delta\lambda = \operatorname{tg} v \sec \varphi_0; \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} t = \sin v \operatorname{tg} \varphi_0; \quad (8)$$

$$\sin \varepsilon = \sin u \sin \alpha_{1,2} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \operatorname{tg} v \cos \alpha_{1,2} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}; \quad (9)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - \delta + (u - \delta) V_1^2, \quad (10) \quad \alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon, \quad (11)$$

где  $t$  — сближение меридианов;  $\varepsilon$  — сферический избыток треугольника  $P_1' P_0' P_2'$ .

Следующий этап вычислений — переход со сферы на эллипсоид. Согласно работе [3], в данном случае можно пользоваться формулами, устанавливающими связь сферических и геодезических координат и азимутов:



$$\delta\varphi = B_2 - \varphi_2 = \frac{3}{4} e'^2 \sin 2B_1 (1 + e'^2 \cos^2 B_1) \frac{\Delta\varphi^2}{\rho''} + \frac{e'^2}{6 \rho''^2} (7 \cos^2 B_1 - 3) \Delta\varphi^3; \quad (12) \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = u - \delta; \quad (13)$$

$$A_{2,1} = \alpha_{2,1} + 3\varphi_1 = \alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} + \frac{e'^2}{4} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1,2} \frac{\sigma^2}{\rho''} + \frac{e'^2}{12} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1,2} \cos 2\alpha_{1,2} \frac{\sigma^3}{\rho''^2}; \quad (14)$$

$$\Delta L = \Delta\lambda + \delta\lambda = \Delta\lambda + \frac{e'^2}{3} \cos B_1 \sin \alpha_{1,2} \cos^2 \alpha_{1,2} \frac{\sigma^3}{\rho''^2}. \quad (15)$$

Чтобы облегчить вычисления широт, нами составлена таблица поправок  $\delta\varphi$  по аргументам  $B_1$  и  $\Delta\varphi$  (табл. 1), где  $\delta\varphi$  выражены в десяти тысячных долях секунды.

Таблица 2  
Значения коэффициента  $K$

$B_1$	$K$
30°	1,50
35	1,34
40	1,17
45	1,00
50	0,83
55	0,66
60	0,50
65	0,36
70	0,23

В отличие от изображения на шаре в I конформной проекции Гаусса, где сферические разности долгот  $\Delta\lambda$  равны геодезическим, в нашем случае в разность долгот вводится поправка  $\delta\lambda$ , обусловленная неточностью сферического азимута  $\alpha_{1,2}$  (в который не введена редукция  $\psi_1$ ) и средним линейным масштабом.

$$m = 1 + \frac{e'^2}{2} \cos^2 B_1 \frac{\Delta\varphi^2}{\rho''} - \frac{e'^2}{4} \sin 2B_1 \frac{\Delta\varphi^3}{\rho''^2}. \quad (16)$$

Исследования показали, что максимальное значение величины  $\delta\lambda$  при  $B_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_{1,2} = 35^\circ 10'$  и  $S = 60$  км не превышает  $0,0001''$ , следовательно, второй член формулы (15) можно не учитывать.

Разность между значениями  $A_{2,1}$  и  $\alpha_{2,1}$  равна утроенной редукции направления  $\psi_1$ . Эту поправку определим с помощью графика, приведенного ниже, а умножив на коэффициент  $K$ , получим окончательное значение  $\delta\alpha_{2,1}$ , максимальное значение которой  $0,022''$ .

Таким образом, если решаемых задач немного, данный способ можно рекомендовать для решения прямой геодезической задачи при расстояниях между пунктами до 60 км. Все расчеты целесообразно выполнять в нелогарифмическом виде с применением восьмизначных таблиц натуральных значений тригонометрических функций. Пример решения задачи по изложенному способу приведен в табл. 3.

В работе [1] соответственно получено:

$$B_2 = \dots 09,6384'', \quad L_2 = \dots 45,0504'', \quad A_{2,1} = \dots 53,557''.$$

Пример решения задачи

Элементы формул	Числовые данные	Элементы формул	Числовые данные	Элементы формул	Числовые данные
1 $B_1$	47° 46' 52,647"	2 $L_1$	35° 49' 36,330"	3 $A_{1,2}$	44° 12' 13,67"
31 $\Delta\varphi V_1^2$	17 17,0176	21 $\Delta\lambda$	25 08,7204	26 $t$	18 42,412
12 $-\delta\varphi$	0,0261	34 $L_2$	36 14 45,0504	30 $-\epsilon$	- 22,533
31 $B_2$	48 04 09,6385	5 $\rho''/N_1$	0,3227938	35 $\delta\alpha_{2,1}$	0,009
4 $S$	44797,279 м	6 $\sigma$	1446'',0288	36 $A_{2,1}$	224 30 53,588
7 $\text{tg}\sigma$	0,0070106613	8 $\sin\sigma$	0,070104880	14 $\sin v$	0,0048878006
9 $\cos\alpha_{1,2}$	0,71686441	10 $\sin\alpha_{1,2}$	0,69721261	16 $\text{tg}\varphi_0$	1,11331519
11 $\text{tg}u$	0,0050256936	14 $\sin v$	0,0048878006	25 $\text{tg}t$	0,0054416626
12 $u$	0° 17' 16,6150"	15 $v$	0° 16' 48'',1853	26 $t$	0° 18' 42'',417
1 $\varphi_1$	47 46 52,6470				
13 $\varphi_0$	48 04 09,2620	19 $\text{tg}v$	0,0048878592	27 $\sin u$	0,005026
14 $\sin v$	0,0048878	17 $\sec\varphi_0$	1,49648612	10 $\sin\alpha_{1,2}$	0,6972
18 $\sin\varphi_0$	0,74395	20 $\text{tg}\Delta\lambda$	0,0073146134	28 $\text{tg}\frac{\sigma}{2}$	0,003505
22 $\text{tg}\frac{\Delta\lambda}{2}$	0,0036572	21 $\Delta\lambda$	0° 25' 08'',7204	29 $\sin\epsilon$	0,00001228
23 $\sin\delta$	0,000013299			30 $\epsilon$	2'',533
24 $\delta$	2'',7431				

Список литературы: 1. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. — М.: Недра, 1976. 2. Таблицы для вычисления геодезических координат. — М.: 2-е изд., 1953. 3. Ходорович П. А. Решение главной задачи высшей геодезии методом свободного выбора положения нормальной параллели при конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара. — Омск, 1938. 4. Berroth A. Sphäroidische Korrekionsgrößen durch Konforme Projektion auf die einhüllende Kugelschafmit parallelkreisformigen Charakteristik. — Zeit. f. Verm., 1922, № 12.

Статья поступила 6 мая 1980 г.

УДК 523.3/4

П. М. ЗАУЛЯК, В. Е. ЗИНГЕР, В. В. КИРИЧУК

### ОБ ОЦЕНКЕ СТЕПЕННЫХ ДИСПЕРСИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

Как известно [2], по эмпирическим значениям ковариационной функции аномалий силы тяжести, полученных в результате автокорреляционного анализа аномального гравитационного по-