УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ

ТОЧНОСТЬ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА В СЕРЕДИНЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Вопросы исследования распределения ошибок в свободных линейно-угловых рядах, состоящих из центральных систем или из двух рядов равносторонних треугольников, уже освещались в работах [1—4]. Что же касается рядов из центральных систем, проложенных между жесткими пунктами, то данные об их исследованиях в литературе отсутствуют.

Цель настоящей работы — получить формулы для подсчета обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны в середине линейно-углового ряда, состоящего из центральных систем и уравненного за условия фигур, сторон, горизонта, дирекционных углов и координат.

Если такой ряд, в котором измерены все углы и стороны, проложен между исходными пунктами (рисунок), то при уравнивании его по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур, $8N+4$ синусных условных уравнений двух видов, N условных уравнений горизонта, условное уравнение дирекционных углов и условные уравнения абсциссы и ординаты (N — число центральных систем в ряду).

Виды условных уравнений фигур, сторон и горизонта приведены в работах [1, 4], а условные уравнения дирекционных углов и координат будут:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1)(-1)^{i}+w_{\alpha}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)(-1)^{i}+\frac{1}{2}\left[n(2)-(n-1)(5)+\right.$$
$$\left.+(n-2)(8)-\cdots\right]+w_{x}=0; \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[(2)+(8)+(14)+\cdots+(3n-1)\right]+w_y=0, \quad (3)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i—1)$, (b_i) — вероятнейшие поправки к углам и сторонам; n — число треугольников в верхнем ряду; w — свободные члены условных уравнений.

Весовая функция для дирекционного угла k-й связующей стороны треугольника верхнего ряда

$$dF_{\alpha_к}=\sum_{i=1}^{k}(3i-1)(-1)^i. \quad (4)$$

При решении нормальных уравнений погрешности угловых измерений в радианах и относительные линейные считались равноточными.

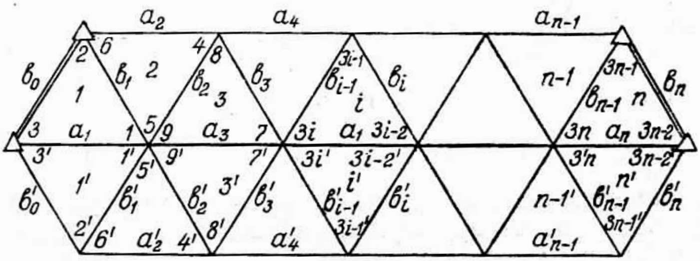

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

Решение нормальных уравнений выполнялось по методу двух групп. В первую группу были включены условные уравнения фигур, во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразование коэффициентов второй группы производили так, как показано в работах [1—3]. Обозначим преобразованные коэффициенты условных уравнений сторон через a_i, b_i, условных уравнений горизонта — через c_j $(j=1, 2, 3, \ldots, N)$, условного уравнения дирекционных углов — через d, условного уравнения ординаты — через e, условного уравнения абсциссы — через g, а коэффициенты весовой функции — через f_α.

Из решения нормальных уравнений найдем квадратичные коэффициенты эквивалентной системы. Условные уравнения сторон первого вида не имеют общих поправок, поэтому $[a_1a_1]=1{,}6667$; $[a_ia_i]=2{,}6667$.

Для нижнего ряда треугольников коэффициенты этого вида уравнений (при нечетных i) $[a_i'a_i'\cdot n]=2{,}0667$; $[a_i'a_i'(n+i—1)]=2{,}2917$.

Квадратичные коэффициенты второго вида синусных условных уравнений соответственно для верхнего и нижнего рядов треугольников: $[b_1b_1\cdot 2n]=1{,}2056$; $[b_2b_2(2n+1)]=1{,}3563$;

$$[b_i b_i (2n+i-1] = 1{,}3866; \quad [b_n b_n (3n-1)] = 0{,}7646;$$

$$[b_1' b_1' \cdot 3n] = 1{,}4153; \quad [b_2' b_2' (3n+1)] = 1{,}3410;$$

для нечетных i при $3 \leqslant i < n$

$$[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1{,}3430;$$

для четных i при $2 < i < n-1$

$$[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1{,}3310;$$

при $i = n-1$

$$[b_i' b_i' (4n-2)] = 1{,}3184;$$

при $i = n$

$$[b_n' b_n' (4n-1)] = 1{,}7020.$$

Квадратичые коэффициенты последующих условных уравнений второй группы выразятся следующими формулами:

$$[c_j c_j (4n + j - 1)] = 3 - \frac{0{,}3}{c_{j-1}}, \text{ где } c_{j-1} = [c_{j-1} c_{j-1} (4n + j - 2)];$$

$$[dd (4n + N)] = 0{,}2928\, N + 0{,}5318; \; [ee (4n + N + 1)] =$$
$$= 0{,}1928\, N + 0{,}0502; \; [gg (4n + N + 2)] = 0{,}02\, (2N + 1)(N^2 + N + 6).$$

Для определения веса функции дирекционного угла связующей стороны используем формулу обратного веса, которую запишем следующим образом:

$$\frac{1}{P_{f\alpha}} = [f_\alpha f_\alpha] - \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} + \frac{1}{P_5} + \frac{1}{P_6} + \frac{1}{P_7} + \frac{1}{P_8}\right), \quad (5)$$

где $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$ и т. д. — значения величин, вносимых условными уравнениями второй группы в обратный вес функции.

Квадратичный коэффициент для весовой функции дирекционного угла имеет значение

$$[f_{\alpha_к} f_{\alpha_к}] = \frac{2}{3} k. \quad (6)$$

Определим величины $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$ и т. д. Синусные условные уравнения первого вида с весовой функцией образуют соответственно для верхнего и нижнего ряда треугольников такие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[a_i f_{\alpha_к} (i-1)] = (-1)^i\, 0{,}5774 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant k; \; [a_i f_{\alpha_к} (i-1)]\Big|_{i=k+1}^{n} = 0;$$

$$[a_1' f_{\alpha_к} n] = 0{,}3464; \; [a_i' f_{\alpha_k} (n + i - 1)] = 0{,}2165 \text{ при } 3 \leqslant i \leqslant n-2.$$

Для синусных условных уравнений второго вида и весовой функции дирекционного угла

$$[b_1 f_{\alpha_1} \cdot 2n] = 0{,}1490; \; [b_1 f_{\alpha_k} \cdot 2n] = 0{,}3655 \text{ при } 1 < k \leqslant n-1;$$

$$[b_2 f_{\alpha_k} (2n+1)] = -0{,}3890 \text{ при } 2 < k \leqslant n-1;$$

$$[b_1' f_{\alpha_1} \cdot 3n] = 0{,}2421; \; [b_1' f_{\alpha_2} \cdot 3n] = -0{,}2566;$$

$$[b_1' f_{\alpha_k} \cdot 3n] = -0{,}2510.$$

Остальные значения неквадратичных коэффициентов этих видов уравнений ввиду объемности материала здесь не приводятся. Эти значения рассмотрены автором в статье *.

Значения величин, вносимых синусными условными уравнениями в обратный вес функции дирекционного угла, выразятся следующими формулами:

$$\frac{1}{P_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_\alpha (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]} = 0{,}125\,k + 0{,}075; \qquad (7)$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_2} = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0{,}0102\,k + 0{,}0478;$$

для четных k

$$\frac{1}{P_2} = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_\alpha (n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = 0{,}0102\,k + 0{,}0376. \qquad (8)$$

Далее для нечетных k

$$\frac{1}{P_3} = \sum_{1}^{n} \frac{[b_i f_{\alpha_k} (2n+i-1)]^2}{[(b_i b_i (2n+i-1)]} = 0{,}1205\,k - 0{,}0990; \qquad (9)$$

для четных k

$$\frac{1}{P_3} = \sum_{1}^{n} \frac{[b_i f_{\alpha_k} (2n+i-1)]^2}{[b_i b_i (2n+i-1)]} = 0{,}1221\,k - 0{,}1180;$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_4} = \sum_{1}^{n} \frac{[b_i' f_{\alpha_k} (3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i' (3n+i-1)]} = 0{,}0196\,k + 0{,}0282. \qquad (10)$$

* Лозинский В. В. Точность дирекционного угла связующих сторон ряда из центральных систем линейно-угловой триангуляции, проложенного между сторонами с исходными дирекционными углами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 31.

для четных k

$$\frac{1}{P_4}=\sum_1^n \frac{[b^1{}_i f_{\alpha_k}(3n+i-1)]^2}{[b'_i b'_i (3n+i-1)]}=0,0208\,k+0,0108.$$

Для уравнений горизонта и весовой функции неквадратичные коэффициенты имеют вид:

$$[c_1 f_{\alpha_1}\cdot 4n]=0,1756;\ [c_1 f_{\alpha_2}\cdot 4n]=0,7352;\ [c_1 f_{\alpha_3}\cdot 4n]=0,981;$$

$$[c_2 f_{\alpha_1}(4n+1)]=0,0329;\ [c_2 f_{\alpha_2}(4n+1)]=0,1083;$$

$$[c_2 f_{\alpha_3}(4n+1)]=0,408;\ [c_2 f_{\alpha_4}(4n+1)]=0,9504.$$

Последующие коэффициенты этого вида с ошибкой не более 3% равны

$$[c_1 f_{\alpha_\text{к}} 4n]=0,9480;$$

$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]=1,200 \text{ при } j=2,3,4,\ldots \text{ и } k\geqslant 5,7,9,\ldots;$$

$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]=0,1400 \text{ при } j=3,4,5,\ldots \text{ и } k=4,6,8,\ldots;$$

$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]=0,0688 \text{ при } j=3,4,5,\ldots \text{ и } k=3,5,7,\ldots;$$

$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]=0,4420 \text{ при } j=3,4,5,\ldots \text{ и } k=5,7,9,\ldots;$$

$$[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]=0,9840 \text{ при } j=3,4,5,\ldots \text{ и } k=6,8,10,\ldots$$

Остальные коэффициенты этого вида уравнений примем равными нулю. Опустив ряд преобразований, запишем выражение для определения суммарного влияния уравнений горизонта и весовой функции на обратный вес дирекционного угла связующей стороны

$$\frac{1}{P_5}=\sum_1^j \frac{[c_j f_{\alpha_k}(4n+j-1)]^2}{[c_j c_j (4n+j-1)]}=0,0036\,k^2+0,1890\,k-0,1690. \quad (11)$$

Условные уравнения дирекционных углов и координат образуют с весовой функцией такие неквадратичные коэффициенты:

для нечетных k

$$\begin{cases} [df_{\alpha_k}(4n+N)]=0,1480\,k+0,1940; \\ [ef_{\alpha_k}(4n+N+1)]=\dfrac{0,2\,k-0,22\,N-0,26}{N+1,8}; \end{cases}$$

для четных k

$$\begin{cases} [df_{\alpha_k}(4n+N)]=0,1540\,k+0,1730; \\ [ef_{\alpha_k}(4n+N+1)]=\dfrac{0,2\,k-0,13\,N-0,1}{N+1,8}; \end{cases}$$

для последней связующей стороны ряда

$$[df_{\alpha_k}(4n+N)]=-0,0019\,k^2+0,1707\,k+0,2409$$

и $$[gf_{\alpha_k}(4n+N+2)]=0{,}048\,(k^2-2Nk-k-N).$$

Следовательно, после некоторых преобразований с достаточной точностью получим выражения для определения влияния уравнений дирекционных углов и координат на обратный вес: для нечетных k

$$\frac{1}{P_6}=\frac{(0{,}274\,k+0{,}358)^2}{N+1{,}8};$$

для четных k

$$\frac{1}{P_6}=\frac{(0{,}285\,k+0{,}320)^2}{N+1{,}8}; \qquad (12)$$

для последнего значения k

$$\frac{1}{P_6}=\frac{(-0{,}0035\,k^2+0{,}315\,k+0{,}445)^2}{N+1{,}8};$$

для нечетных k

$$\frac{1}{P_7}=\frac{(0{,}45\,k-0{,}5\,N-0{,}58)^2}{N^3+3{,}85\,N^2+4{,}15\,N+0{,}8}; \qquad (13)$$

для четных k

$$\frac{1}{P_7}=\frac{(0{,}45\,k-0{,}29N-0{,}22)^2}{N^3+3{,}85\,N^2+4{,}15\,N+0{,}8}$$

и

$$\frac{1}{P_8}=\frac{(k^2-2Nk-k-N)^2}{8{,}7\,(2N+1)(N^2+N+6)}. \qquad (14)$$

Следует заметить, что влиянием уравнения ординат (3) на величину обратного веса функции дирекционного угла можно пренебречь, погрешность при этом не превышает 1 ... 2% величины обратного веса для всех связующих сторон ряда, кроме первой и последней стороны, где ошибка не больше 10 ... 15%.

Подставляя соответственно найденные значения в выражение (5), без учета значений $\frac{1}{P_7}$, и преобразовывая их, получаем приближенные формулы для определения обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны ряда, расположенного между исходными пунктами:

для нечетных k

$$\frac{1}{P_{f_{\alpha_k}}}=0{,}0036\,[k\,(56{,}4-k)+32{,}5]-\frac{(0{,}274\,k+0{,}358)^2}{N+1{,}8}-$$

$$-\frac{(k^2-2Nk-k-N)^2}{8{,}7\,(2N+1)(N^2+N+6)};$$

для четных k

$$\frac{1}{P_{f_{\alpha_к}}} = 0{,}0036\,[k\,(55{,}6 - k) + 45{,}3] - \frac{(0{,}285\,k + 0{,}320)^2}{N + 1{,}8} -$$

$$- \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8{,}7\,(2N + 1)\,(N^2 + N + 6)};$$

для последней связующей стороны ряда

$$\frac{1}{P_{f_{\alpha_к}}} = 0{,}0036\,[k\,(55{,}6 - k) + 45{,}3] -$$

$$- \frac{(-0{,}0035\,k^2 + 0{,}315\,k + 0{,}445)^2}{N + 1{,}8} - \frac{(k^2 - 2Nk - k - N)^2}{8{,}7\,(2N + 1)\,(N^2 + N + 6)}.$$

О точности полученных формул (15) свидетельствует таблица, в которой приведены значения обратных весов функций дирекционных углов связующих сторон, полученных путем строго-

Значения обратных весов дирекционных углов

k	4			5			6		
	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %	По схеме Гаусса	По формуле	Погрешность, %
	Ряд линейно-угловой триангуляции между исходными пунктами								
1	0,177	0,176	0,6	0,192	0,192	0	0,205	0,205	0
2	0,261	0,254	2,7	0,284	0,279	1,8	0,304	0,303	0,3
3	0,258	0,216	16,3	0,285	0,245	14,0	0,313	0,277	11,5
4	0,257	0,255	0,8	0,281	0,277	1,4	0,308	0,308	0
5	0,257	0,244	5,1	0,273	0,247	9,5	0,297	0,269	9,4
6	0,258	0,285	10,5	0,273	0,272	0,4	0,290	0,282	2,8
7	0,261	0,310	18,8	0,281	0,284	1,1	0,290	0,274	5,5
8	0,177	0,168	5,1	0,285	0,296	3,9	0,297	0,277	6,7
9				0,284	0,326	14,8	0,308	0,306	0,6
10				0,192	0,192	0	0,313	0,278	11,2
11							0,304	0,313	3,0
12							0,205	0,212	3,4
	Ряд линейно-угловой триангуляции между дирекционными углами								
1	0,336	0,339	0,9	0,342	0,346	1,2	0,347	0,351	1,2
2	0,458	0,453	1,1	0,478	0,473	1,0	0,493	0,489	0,8
3	0,530	0,494	7,8	0,561	0,522	7,0	0,585	0,543	7,2
4	0,560	0,531	5,2	0,613	0,584	4,7	0,653	0,624	4,4
5	0,560	0,543	3,0	0,630	0,608	3,5	0,681	0,656	3,7
6	0,530	0,502	5,3	0,630	0,602	4,4	0,703	0,678	3,6
7	0,458	0,485	5,9	0,613	0,602	1,8	0,703	0,690	1,8
8	0,336	0,366	8,9	0,561	0,530	5,5	0,681	0,653	4,1
9				0,478	0,506	5,9	0,653	0,644	1,4
10				0,342	0,365	6,7	0,585	0,547	6,5
11							0,493	0,518	5,1
12							0,347	0,362	4,3

го решения задачи на ЭВМ (из решения схемы Гаусса) и по формулам (15). При решении примеров мы принимали, что число центральных систем в ряде $N=4$, 5, 6.

Для сравнения в таблице помещены значения обратных весов функций дирекционных углов связующих сторон ряда аналогичного построения, только расположенного между исходными дирекционными углами. Значения обратных весов также получены из решения схемы Гаусса и вычислены по формулам, предложенным ранее автором (см. сноску в данной статье).

На основании данных таблицы можно сделать следующие выводы:

Обратный вес дирекционного угла связующих сторон в ряде, построенном между исходными пунктами, примерно в два раза меньше, чем в аналогичном ряде, проложенном между исходными дирекционными углами.

Связующие стороны с наибольшим обратным весом находятся между серединой ряда и жесткими пунктами.

Изменение значений обратного веса дирекционного угла связующей стороны в рассматриваемом ряде между начальной и конечной сторонами находится в небольших пределах (порядка 8%). В ряде между дирекционными углами эти значения изменяются в пределах порядка 45%.

Как видно из таблицы, погрешности в определении весов по формулам (15) невелики и этими формулами вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида.

Список литературы: 1. *Лозинский В. В.* Ошибка дирекционного угла связующих сторон рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 2. *Лозинский В. В.* Продольный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. *Лозинский В. В.* Поперечный сдвиг линейно-углового ряда из центральных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 4. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24.

Работа поступила в редколлегию 15 октября 1979 года.